STUDIO DELLA FUNZIONE CUBICA

a cura di Maria Teresa Bianchi

La funzione è razionale intera ed è espressa in forma normale da:

#1: $y = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$

I coefficienti del polinomio di 3° grado a secondo membro (**a, b, c, d**) sono numeri razionali

Se **a è diverso da 0** si ha una **cubica**

Se a=0 e b≠0 si ha una **parabola**

Se a=0 e b=0 e c≠0 si ha una retta non parallela all'asse x

Se a=0 e b=0 e c=0 e d≠0 si ha una funzione costante (retta parallela all'asse x)

Se a=0 e b=0 e c=0 e d=0 si ha l' asse x

N.B.: In ogni caso, se **d=0** la curva passa per l'origine degli assi cartesiani.

DOMINIO = R

INTERSEZIONI CON ASSI

#2: $\text{SOLVE}\left(\left[x = 0,\ y = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d\right], [x, y]\right)$

#3: $[x = 0 \wedge y = d]$

La curva passa per il punto **A (0, d)**

#4: $\text{SOLVE}\left(\left[y = 0,\ y = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d\right], [x, y]\right)$

#5: $\Bigg[x\cdot 1 =$

$$\frac{2\cdot\sqrt{(b^2 - 3\cdot a\cdot c)}\cdot \text{SIN}\left(\frac{\text{ASIN}\left(\frac{(27\cdot a^2\cdot d - 9\cdot a\cdot b\cdot c + 2\cdot b^3)\cdot \text{SIGN}(a)}{2\cdot(b^2 - 3\cdot a\cdot c)^{3/2}}\right)}{3}\right)}{3\cdot|a|}$$

$- \frac{b}{3\cdot a}$, $x\cdot 2 = -$

$$\frac{2\cdot\sqrt{(b^2-3\cdot a\cdot c)}\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ASIN}\left(\frac{(27\cdot a^2\cdot d-9\cdot a\cdot b\cdot c+2\cdot b^3)\cdot \mathrm{SIGN}(a)}{2\cdot(b^2-3\cdot a\cdot c)^{3/2}}\right)}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}{3\cdot|a|}-\frac{b}{3\cdot a},\quad x\cdot 3 =$$

$$\left.\frac{2\cdot\sqrt{(b^2-3\cdot a\cdot c)}\cdot \mathrm{COS}\left(\frac{\mathrm{ASIN}\left(\frac{(27\cdot a^2\cdot d-9\cdot a\cdot b\cdot c+2\cdot b^3)\cdot \mathrm{SIGN}(a)}{2\cdot(b^2-3\cdot a\cdot c)^{3/2}}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}{3\cdot|a|}-\frac{b}{3\cdot a}\right]$$

Come si può osservare, le soluzioni di un'equazione di 3° grado sono molto complicate da calcolare con una formula risolutiva, ma molto spesso il polinomio è scomponibile in fattori utilizzando le regole di scomposizione dei polinomi, come il **TEOREMA DEL RESTO E LA REGOLA DI RUFFINI.**
CON TALE TIPO DI SCOMPOSIZIONE SI TROVANO DUE FATTORI: UNO DI 1° GRADO ED UNO DI 2° GRADO.
TALI FATTORI SONO ESCLUSIVAMENTE A COEFFICIENTI RAZIONALI, cioè:

$$\#6:\quad (x-\alpha)\cdot(A\cdot x^2+B\cdot x+C)$$

Se il polinomio è scomponibile con il Th del resto e la regola di Ruffini il valore di α è un numero razionale e la funzione passa per il punto B (α, 0). Si avrà poi:

altri due punti di intersezione con l'asse x se **$B^2-4AC > 0$**
un altro punto di intersezione con l'asse x se **$B^2-4AC = 0$**
nessun altro punto di intersezione con l'asse x se **$B^2-4AC < 0$**

•

Se il polinomio non è scomponibile in fattori a coefficienti razionali, comunque l'equazione di 3° grado

$$\#7:\quad a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=0$$

ha almeno una soluzione reale β perchè esiste almeno un valore β tale che f (β) = 0, essendo una funzione continua in R e assumendo valori discordi per x →+inf e per x →−inf (vedi calcolo limiti).

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI in funzioni continue

Se una funzione è continua in un intervallo chiuso [a, b], e se agli estremi dell'intervallo assume valori di segno opposto, essa si annulla in almeno un punto interno all'intervallo.

SEGNO DELLA FUNZIONE

· Se il polinomio è scomponibile si trova il segno risolvendo la disequazione prodotto, altrimenti si trascura questa parte dello studio di funzione.
Gli altri elementi dello studio faranno dedurre anche il segno.

CALCOLO DEI LIMITI agli estremi del dominio

#8: $\lim_{x\to+\infty} (a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d)$

#9: $\infty\cdot \mathrm{SIGN}(a)$

#10: $\lim_{x\to-\infty} (a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d)$

#11: $-\ \infty\cdot \mathrm{SIGN}(a)$

Il calcolo di tali limiti dipende soltanto dal monomio di massimo grado ax^3. Si avrà:

se a>0 il limite per x→+inf è +inf e il limite per x→-inf è -inf
se a<0 il limite per x→+inf è -inf e il limite per x→-inf è +inf
•

CALCOLO DELLA DERIVATA PRIMA

CRESCENZA E/O DECRESCENZA - MASSIMI E/O MINIMI RELATIVI

#12: $\frac{d}{dx} (a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d)$

#13: $3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA RICERCA DEI MAX E/O MIN RELATIVI

#14: $3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c = 0$

#15: $\mathrm{SOLVE}(3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c = 0,\ x,\ \mathrm{Real})$

#16: $$x = \frac{\sqrt{(b^2 - 3\cdot a\cdot c)} - b}{3\cdot a} \vee x = - \frac{\sqrt{(b^2 - 3\cdot a\cdot c)} + b}{3\cdot a}$$

Si devono distinguere tre casi:

$\Delta<0$ $b^2 - 3ac < 0$ nessuna soluzione reale dell' equazione #14 NON CI SONO MAX NE' MIN RELATIVI
$\Delta=0$ $b^2 - 3ac = 0$ due soluzioni reali coincidenti dell' equazione #14 UN EVENTUALE PUNTO DI MAX O DI MIN REL
$\Delta>0$ $b^2 - 3ac > 0$ due soluzioni reali e distinte dell' equazione#14 DUE EVENTUALI PUNTI DI MAX E/O MIN REL
.

C.S.: Lo studio del segno della derivata prima permette di stabilire la crescenza e/o decrescenza della funzione e, di conseguenza, i massimi e/o minimi relativi.

$\Delta< 0$ la funzione è strettamente crescente o strettamente decrescente perchè la derivata prima risulta o sempre positiva (a>0) o sempre negativa (a<0) nel dominio
$\Delta= 0$ la funzione è strettamente crescente o strettamente decrescente perchè la derivata prima risulta o sempre positiva (a>0) o sempre negativa (a<0) ESCLUSO IL PUNTO DI ASCISSA **-b/3a**
$\Delta> 0$ la funzione ha un massimo e un minimo relativo (segno del trinomio di 2° grado)
•

CALCOLO DELLA DERIVATA SECONDA

CONCAVITA' E FLESSI
.

#17: $$\frac{d}{dx} (3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c)$$

#18: $$6\cdot a\cdot x + 2\cdot b$$

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA RICERCA DEI PUNTI DI FLESSO **y" = 0**

#19: $6\cdot a\cdot x + 2\cdot b = 0$

#20: `SOLVE(6·a·x + 2·b = 0, x, Real)`

#21: $$x = - \frac{b}{3\cdot a}$$

Per studiare la concavità, si deve risolvere la disequazione

#22: $6\cdot a\cdot x + 2\cdot b > 0$

Poichè in una cubica $\mathbf{a \neq 0}$, tale disequazione di primo grado ha come soluzioni:

se **a>0**

#23: $x > - \dfrac{b}{3 \cdot a}$

se **a<0**

#24: $x < - \dfrac{b}{3 \cdot a}$

Si può concludere che lo studio della derivata seconda permette di dire che si ha sempre **un punto di flesso**, che sarà a tangente obliqua o a tangente orizzontale.

Se il valore **-b/(3a)** è soluzione anche dell' equazione **y'= 0** ($\Delta = b^2 - 3ac = 0$) allora il **flesso è a tangente orizzontale**, altrimenti è a **tangente obliqua**.

#25: $\left[- \dfrac{b}{3 \cdot a}, \ f \cdot \left(- \dfrac{b}{3 \cdot a} \right) \right]$

Tenendo presenti tutte le osservazioni fatte possiamo concludere che si avranno i seguenti casi:

$b^2 - 3ac > 0$ cubica con un massimo, un minimo, un flesso a tangente obliqua
$b^2 - 3ac = 0$ cubica senza massimi e minimi, un flesso a tangente orizzontale
$b^2 - 3ac < 0$ cubica senza massimi e minimi, un flesso a tangente obliqua
.

1° ESEMPIO $b^2 - 3ac > 0$

#26: $y = x^3 - x^2 - x + 2$

a = 1, b = -1, c = -1, d = 2

#27: $b^2 - 3 \cdot a \cdot c$

#28: 4

Si avrà un max e un min relativi e un flesso a tangente obliqua.
Infatti si ha:

CALCOLO DERIVATA PRIMA

#29: $\frac{d}{dx}(x^3 - x^2 - x + 2)$

#30: $3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1$

#31: $SOLVE(3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1 = 0, x, Real)$

#32: $x = -\frac{1}{3} \vee x = 1$

#33: $3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1 > 0$

#34: $SOLVE(3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1 > 0, x, Real)$

#35: $x < -\frac{1}{3} \vee x > 1$

I punti di ascissa -1/3 e 1 sono max e min relativi.

#36: $y = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - -\frac{1}{3} + 2$

#37: $y = \frac{59}{27}$

#38: $\left[-\frac{1}{3}, \frac{59}{27}\right]$

#39: $y = 1^3 - 1^2 - 1 + 2$

#40: $y = 1$

#41: [1, 1]

CALCOLO DERIVATA SECONDA

#42: $\frac{d}{dx}(3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1)$

#43: $6\cdot x - 2$

#44: SOLVE(6·x − 2 = 0, x, Real)

#45: $x = \frac{1}{3}$

#46: $6\cdot x - 2 > 0$

#47: SOLVE(6·x − 2 > 0, x, Real)

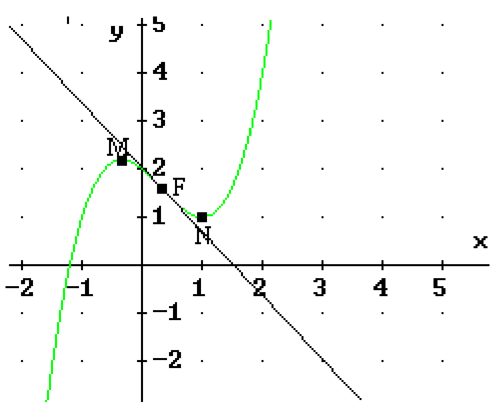
#48: $x > \frac{1}{3}$

#49: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 2$

#50: $y = \frac{43}{27}$

Il punto di ascissa 1/3 è flesso a tangente obliqua.

#51: $\left[\frac{1}{3}, \frac{43}{27}\right]$



EQUAZIONE DELLA TANGENTE DI FLESSO $y - y_F = f'(x_F)(x - x_F)$

#52: $y - \frac{43}{27} = m\cdot\left(x - \frac{1}{3}\right)$

#53: $m := 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{3} - 1$

#54: $-\frac{4}{3}$

#55: $y - \frac{43}{27} = -\frac{4}{3}\cdot\left(x - \frac{1}{3}\right)$

#56: $y = \frac{55 - 36\cdot x}{27}$

2° ESEMPIO $b^2 - 3ac < 0$

#57: $y = x^3 - x^2 + x + 2$

a = 1, b = -1, c = 1, d = 2

#58: $b^2 - 3\cdot a\cdot c$

#59: $(-1)^2 - 3\cdot 1\cdot 1$

#60: -2

Si avrà un flesso a tangente obliqua; nè max nè min relativi

#61: $\frac{d}{dx}(x^3 - x^2 + x + 2)$

#62: $3\cdot x^2 - 2\cdot x + 1$

#63: SOLVE($3\cdot x^2 - 2\cdot x + 1 = 0$, x, Real)

#64: false

#65: $3\cdot x^2 - 2\cdot x + 1 > 0$

#66: SOLVE($3\cdot x^2 - 2\cdot x + 1 > 0$, x, Real)

#67: true

CALCOLO DERIVATA SECONDA

#68: $\frac{d}{dx}(3\cdot x^2 - 2\cdot x + 1)$

#69: $6\cdot x - 2$

#70: SOLVE($6\cdot x - 2 = 0$, x, Real)

#71: $x = \frac{1}{3}$

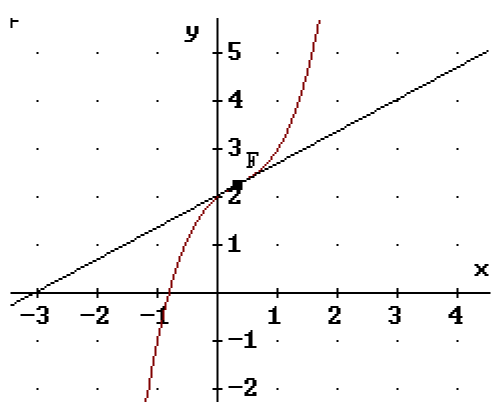
#72: $6\cdot x - 2 > 0$

#73: SOLVE($6\cdot x - 2 > 0$, x)

#74: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 2$

#75: $y = \frac{61}{27}$

#76: $\left[\frac{1}{3}, \frac{61}{27}\right]$



EQUAZIONE DELLA TANGENTE DI FLESSO $y - y_F = f'(x_F)(x - x_F)$

#77: $$y - \frac{61}{27} = \left(3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{3} + 1\right)\cdot\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

#78: $$y = \frac{18\cdot x + 55}{27}$$

3° ESEMPIO $b^2 - 3ac = 0$

#79: $$y = \frac{x^3}{3} + 2\cdot x^2 + 4\cdot x$$

a = 1/3, b = 2, c = 4, d = 0

#80: $$b^2 - 3\cdot a\cdot c$$

#81: $$2^2 - 3\cdot\frac{1}{3}\cdot 4$$

#82: $$0$$

Si avrà un flesso a tangente orizzontale; nè max nè min relativi.
CALCOLO DERIVATA PRIMA

#83: $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + 2\cdot x^2 + 4\cdot x\right)$$

#84: $$x^2 + 4\cdot x + 4$$

#85: $$\mathrm{SOLVE}(x^2 + 4\cdot x + 4 = 0,\ x,\ \mathrm{Real})$$

#86: $$x = -2$$

#87: $$x^2 + 4\cdot x + 4 > 0$$

#88: $$\mathrm{SOLVE}(x^2 + 4\cdot x + 4 > 0,\ x,\ \mathrm{Real})$$

#89: $x \neq -2$

CALCOLO DERIVATA SECONDA

#90: $\frac{d}{dx}(x^2 + 4\cdot x + 4)$

#91: $2\cdot x + 4$

#92: SOLVE($2\cdot x + 4 = 0$, x, Real)

#93: $x = -2$

#94: $2\cdot x + 4 > 0$

#95: SOLVE($2\cdot x + 4 > 0$, x, Real)

#96: $x > -2$

Il punto di ascissa -2 è un flesso a tangente orizzontale

#97: $y = \frac{(-2)^3}{3} + 2\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2)$

#98: $y = -\frac{8}{3}$

#99: $\left[-2, -\frac{8}{3}\right]$

La retta di equazione **y=y**F è la tangente di flesso