STUDIO DELL' EQUAZIONE DI PRIMO GRADO A DUE INCOGNITE E RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

$ax + by + c = 0$

di

Maria Teresa Bianchi

Lezione in laboratorio

a. s. 2002-2003

L' equazione di primo grado a due incognite x,y, ammette come soluzioni infinite coppie di numeri reali (x, y), cioè esistono infinite coppie di numeri reali che verificano l'uguaglianza.

Se, ad ogni coppia che verifica un' equazione assegnata di questo tipo, facciamo corrispondere un punto del piano cartesiano ortogonale Oxy, osserviamo che i punti sono allineati, cioè "formano", con un processo all'infinito, una retta del piano.

Vediamo un esempio, assegnando un'equazione e trovando alcune delle sue soluzioni, che poi rappresenteremo graficamente come punti del piano Oxy.

#1: $\mathbf{2 \cdot x - 3 \cdot y + 1 = 0}$

Ricaviamo la y in funzione di x con Risolvi, Espressione rispetto ad y.
Utilizzando la funzione di Derive, TABLE (Calcola, Tabella , tenendo selezionato il 2° membro della #3 e dando valori anche negativi alla x), troviamo alcune coppie soluzione della #1:

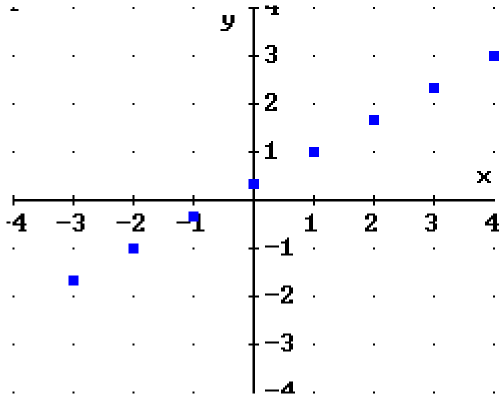
#2: SOLVE(2·x − 3·y + 1 = 0, y, Real)

#3: $$y = \frac{2 \cdot x + 1}{3}$$

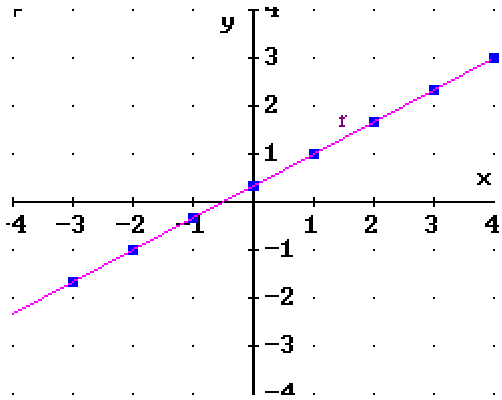
#4: $\mathrm{TABLE}\left(\frac{2 \cdot x + 1}{3}, x, -3, 5, 1\right)$

#5: $$\begin{bmatrix} -3 & -\frac{5}{3} \\ -2 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \\ 2 & \frac{5}{3} \\ 3 & \frac{7}{3} \\ 4 & 3 \\ 5 & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

Ora rappresentiamo tali coppie come punti del piano, andando in ambiente 2D, inserendo il grafico (si può, anche selezionare la visualizzazione più o meno grande dei punti prima di disegnarli con Opzioni Visualizzazione Punti).



Come già detto, le coppie soluzione dell'equazione sono rappresentate da punti allineati. Tracciamo ora tutta la retta, che chiamiamo r, selezionando l'equazione #1 o #3.



Si dimostra che LE SOLUZIONI DI UNA QUALSIASI EQUAZIONE DI 1° GRADO A DUE INCOGNITE (esclusi due casi banali con particolari coefficienti a, b, c) COSTITUISCONO SEMPRE LE COORDINATE DEI PUNTI DI UNA RETTA del piano Oxy.

Chiameremo allora brevemente la #1 (ax+by+c=0) **EQUAZIONE DELLA RETTA**.
Viceversa, disegnata una retta r del piano cartesiano, ci sarà sempre associata ad essa un' unica equazione di 1° grado a due incognite, ax+by+c=0.

%%%%%%%%%

Analizziamo ora, **al variare dei coefficienti dell'equazione generale**:

#6: **$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$**
cosa accade nella rappresentazione grafica.

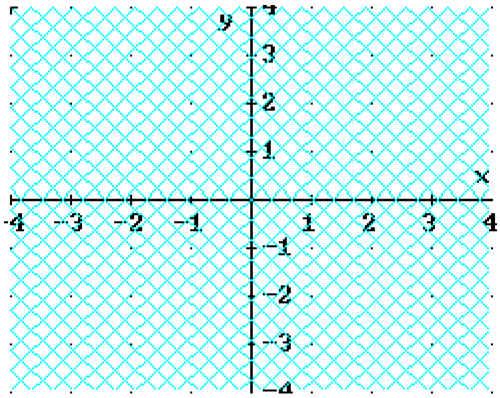
1° caso

#7: **$a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$**
#8: **$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$**

#9: TABLE(0·x + 0·y + 0 = 0, x, −2, 2, 1)

#10: $$\begin{bmatrix} [2, 1] & 0 = 0 \\ [-1, 5] & 0 = 0 \\ [0, 0] & 0 = 0 \\ [1, 3] & 0 = 0 \\ [2, 4] & 0 = 0 \end{bmatrix}$$

E' evidente che tale equazione è verificata da **qualsiasi coppia di numeri reali** (**indeterminata)**, quindi, come rappresentazione grafica non si avrà una retta, ma tutti gli infiniti punti che costituiscono il piano Oxy.

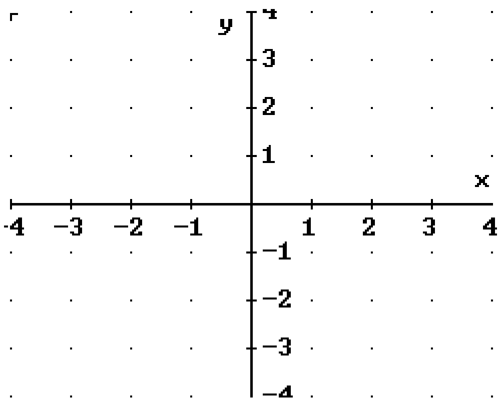


2° caso

#11: **$a = 0 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0$**
#12: **$0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$**

#13: $$\begin{bmatrix} [2, 1] & c = 0 \\ [-1, 5] & c = 0 \\ [0, 0] & c = 0 \\ [1, 3] & c = 0 \\ [2, 4] & c = 0 \end{bmatrix}$$

E' evidente che tale equazione **non** è verificata da **alcuna coppia di numeri reali** (**impossibile**) , quindi, come rappresentazione grafica non si avrà una retta, ma nessun punto del piano Oxy.



3° caso

#14: $a = 0 \wedge b \neq 0 \wedge c = 0$
#15: $0 \cdot x + b \cdot y + 0 = 0$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali con un valore **qualsiasi di x e con y=0**, cioè del tipo (**x, 0**). Si ha:

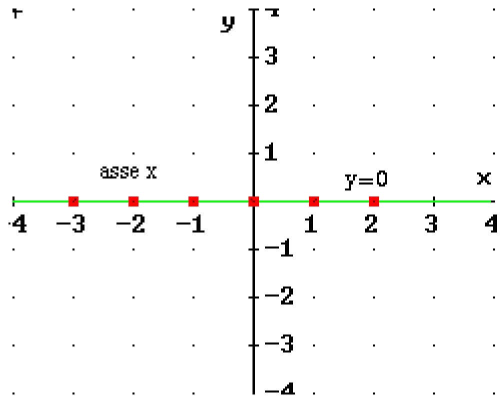
#16: $$b \cdot y = 0$$

ed essendo $b \neq 0$ si ha:

#17: $$y = 0$$

#18: $$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

I punti del piano cartesiano **(x, 0)** sono esclusivamente quelli dell'asse x, detto **asse delle ascisse**: pertanto **y = 0**, la chiameremo **EQUAZIONE DELL' ASSE x**.



4° caso

#19: $a \neq 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$
#20: $a \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali con un valore con **x = 0** e **qualsiasi di y**, cioè del tipo (**0, y**).
Si ha:

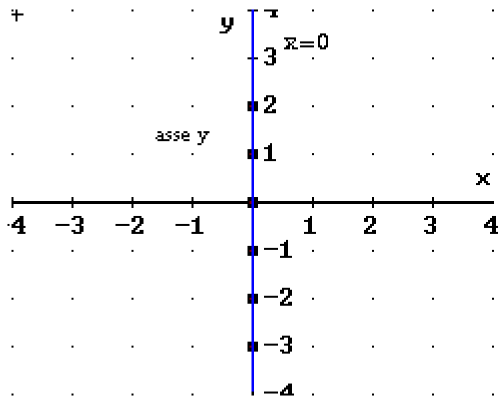
#21: $$a \cdot x = 0$$

ed essendo $a \neq 0$ si ha:

#22: $$x = 0$$

#23: $$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I punti del piano cartesiano (0, y) sono esclusivamente quelli dell'asse y, detto asse delle ordinate: pertanto **x = 0**, la chiameremo **EQUAZIONE DELL' ASSE y**.



5° caso

#24: $a = 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$
#25: $0 \cdot x + b \cdot y + c = 0$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali con un valore **qualsiasi di x e con y=-c/b**, cioè del tipo (**x, -c/b**). Si ha:

#26: SOLVE(0·x + b·y + c = 0, y, Real)

#27: $$y = -\frac{c}{b}$$

#28: $$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{c}{b} \\ 0 & -\frac{c}{b} \\ 1 & -\frac{c}{b} \end{bmatrix}$$

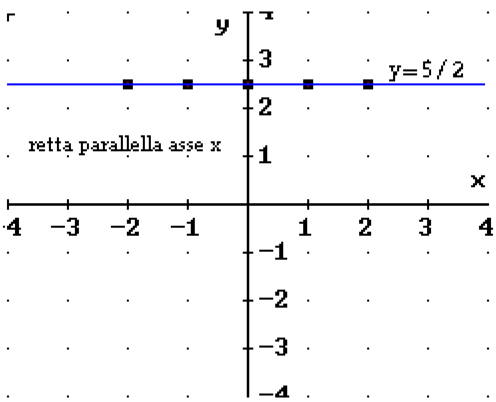
I punti del piano cartesiano (x, -c/b) sono esclusivamente quelli DI UNA RETTA PARALLELA all'asse x, pertanto **y = -c/b**, oppure **y=k**, la chiameremo
EQUAZIONE di una retta PARALLELA ALL' ASSE x.

ESEMPIO:
#29: $0 \cdot x + 2 \cdot y - 5 = 0$
#30: $$2 \cdot y - 5 = 0$$

#31: $$y = \frac{5}{2}$$

#32: $$\begin{bmatrix} -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

I punti del piano cartesiano (x, 5/2) sono esclusivamente quelli DI UNA RETTA PARALLELA all' asse x.



6° caso

#33: $a \neq 0 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0$
#34: $a \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali con un valore **qualsiasi di y e con x=-c/a**, cioè del tipo (**-c/a, y**).
Si ha:

#35: $$x = -\frac{c}{a}$$

#36: $$\begin{bmatrix} -\frac{c}{a} & -1 \\ -\frac{c}{a} & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix}$$

I punti del piano cartesiano (-c/a, y) sono esclusivamente quelli DI UNA RETTA PARALLELA all' asse y, pertanto **x = -c/a**, oppure **x=h**, la chiameremo
EQUAZIONE di una retta PARALLELA ALL' ASSE y.

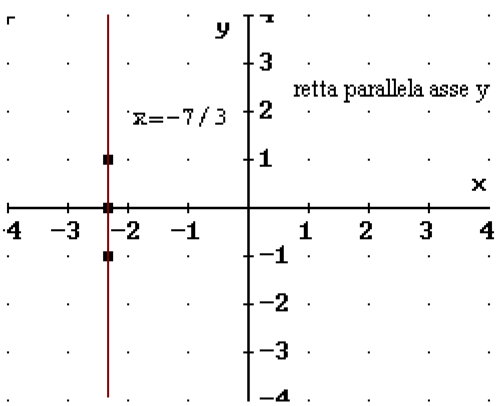
ESEMPIO:

#37: $3 \cdot x + 0 \cdot y + 7 = 0$

#38: $$x = -\frac{7}{3}$$

#39: $$\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & -1 \\ -\frac{7}{3} & 0 \\ -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

I punti del piano cartesiano (-7/3, y) sono esclusivamente quelli DI UNA RETTA PARALLELA all' asse y.



7° caso

#40: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c = 0$
#41: $a \cdot x + b \cdot y + 0 = 0$

#42: $$y = - \frac{a}{b} \cdot x$$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali del tipo

#43: $$\left[x, \ - \frac{a}{b} \cdot x\right]$$

e ponendo:

#44: $$m = - \frac{a}{b}$$

si ha
#45: $\mathbf{y = m \cdot x}$

dove le coppie saranno del tipo:

#46: $\mathbf{[x, m \cdot x]}$

m prende il nome di **COEFFICIENTE ANGOLARE** della retta

CHIARAMENTE LA COPPIA **(0,0)** VERIFICA SEMPRE TALE EQUAZIONE .

Pertanto **ax+by=0** o **y = mx** la chiameremo
EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE DEGLI ASSI CARTESIANI.

ESEMPIO:

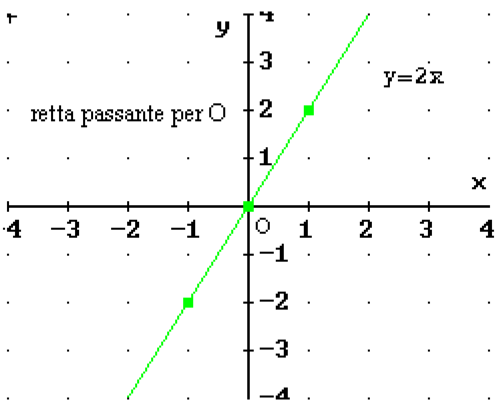
#47: $2 \cdot x - y = 0$

#48: $$y = 2 \cdot x$$

#49: TABLE(y = 2·x, x, –1, 1, 1)

#50: $$\begin{bmatrix} -1 & y = -2 \\ 0 & y = 0 \\ 1 & y = 2 \end{bmatrix}$$

#51: $$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



8° caso

#52: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$
#53: $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

#54: SOLVE(a·x + b·y + c = 0, y, Real)

#55: $$y = - \frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}$$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali del tipo

#56: $$\left[x, - \frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}\right]$$

e ponendo:

#57: $$\left[m = - \frac{a}{b}, q = - \frac{c}{b}\right]$$
si ha:
#58: $y = m \cdot x + q$

dove le coppie saranno del tipo:
#59: $[x, m \cdot x + q]$
m prende il nome di **COEFFICIENTE ANGOLARE** della retta
q è l'**ordinata del punto di intersezione che la retta ha con l'asse y**, cioè (0, q).

ESEMPIO

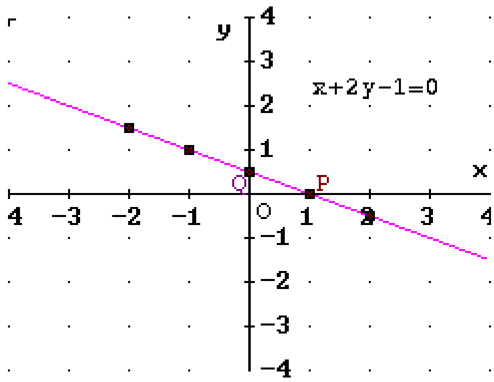
#60: $x + 2 \cdot y - 1 = 0$

#61: $$y = - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

#62: $$\text{TABLE}\left(y = - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, x, -2, 2, 1\right)$$

#63: $$\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La coppia (0,1/2) fornisce le coordinate del punto Q di intersezione con l'asse y e la coppia (1,0) le coordinate del punto P di intersezione con l'asse x.



SISTEMI LINEARI DI 1° GRADO A DUE INCOGNITE
INTERSEZIONE TRA RETTE

Ci proponiamo ora di scoprire se tra due equazioni lineari, ciascuna delle quali ha infinite soluzioni (coppie di numeri reali), esiste qualche soluzione comune.
Ricordando l' interpretazione grafica di ogni equazione di 1° grado a due incognite, si può dire che si potranno avere tre possibilità:

1. le equazioni hanno una sola coppia-soluzione in comune
2. le equazioni non hanno soluzioni comuni
3. tutte le soluzioni di una equazione sono anche soluzione dell'altra.

Infatti, andare a ricercare le soluzioni comuni a due equazioni lineari, significa determinare le coordinate degli eventuali **punti di intersezione** delle rette che ciascuna di esse rappresenta.

Da un punto di vista algebrico, ricercare soluzioni comuni a due o più equazioni significa RISOLVERE UN SISTEMA.

I metodi algebrici per risolvere un sistema lineare sono:
SOSTITUZIONE
CONFRONTO
COMBINAZIONE LINEARE O RIDUZIONE
CRAMER

Affrontiamo ora la rappresentazione grafica con degli esempi.

1. le rette sono incidenti in un punto P le cui coordinate rappresentano l' unica coppia soluzione del sistema che si dirà **POSSIBILE DETERMINATO**.

2. le rette sono parallele con nessun punto in comune e il sistema si dirà **IMPOSSIBILE** (non ci sono coppie-soluzione comuni alle due equazioni).

3. le rette sono parallele coincidenti, quindi hanno tutti i punti in comune e il sistema si dirà **POSSIBILE INDETERMINATO** (tutte le coppie soluzione di una equazione sono anche soluzione dell'altra).

SISTEMA POSSIBILE DETERMINATO

Sono assegnate due equazioni:

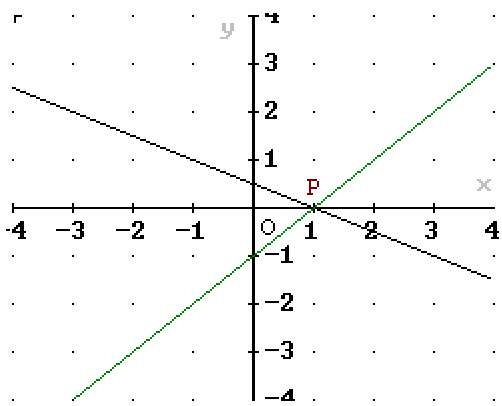
#64: $x + 2\cdot y - 1 = 0$

#65: $x - y - 1 = 0$

#66: SOLVE($[x + 2\cdot y - 1 = 0, x - y - 1 = 0], [x, y]$)

#67: $[x = 1 \wedge y = 0]$

La coppia di numeri reali (1,0) è l'unica soluzione del sistema.
Rappresentiamo le rette descritte dalle due equazioni.
Il loro unico punto comune sarà P (1,0).

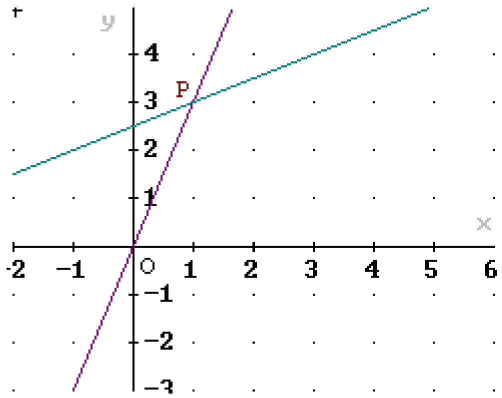


Altro esempio:

#68:   [3·x − y = 0, x − 2·y + 5 = 0]

#69:   SOLVE([3·x − y = 0, x − 2·y + 5 = 0], [x, y])

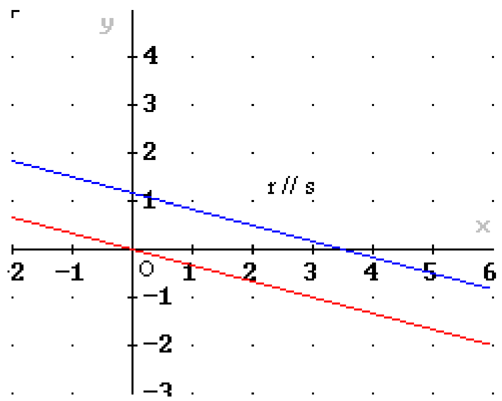
#70:   [x = 1 ∧ y = 3]



SISTEMA IMPOSSIBILE

#72:   SOLVE([x + 3·y = 0, 2·x + 6·y − 7 = 0], [x, y])
#73:   []

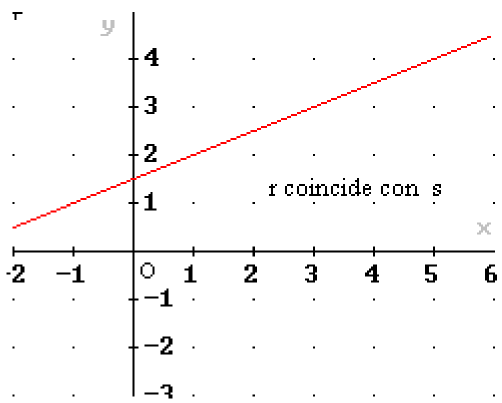
Il sistema non ha soluzione.



SISTEMA POSSIBILE INDETERMINATO

#74:   SOLVE([x − 2·y + 3 = 0, 2·x − 4·y + 6 = 0], [x, y])
#75:   [x − 2·y = −3]

Il sistema ha infinite soluzioni.



RICERCA PUNTI DI INTERSEZIONE DI UNA RETTA CON GLI ASSI CARTESIANI

Per trovare le coordinate di eventuali punti di intersezione tra due rette si deve risolvere algebricamente, come già detto, un sistema.

Nel caso in cui si debbano trovare le coordinate dei punti di intersezione di una retta **r** di equazione **ax+by+c=0** e gli assi cartesiani si dovranno risolvere due sistemi: uno tra l'equazione di r e dell' **asse x** (**y=0**) e l'altro tra l'equazione di r e dell' **asse y** (**x=0**).
In generale si avrà :

#76: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$

#77: SOLVE([a·x + b·y + c = 0, y = 0], [x, y])

#78: $$\left[x = -\frac{c}{a} \wedge y = 0\right]$$

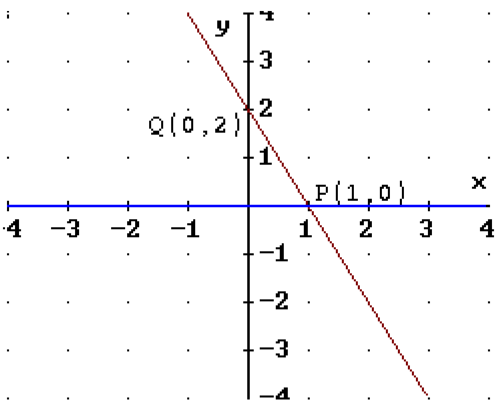
#79: SOLVE([a·x + b·y + c = 0, x = 0], [x, y])

#80: $$\left[x = 0 \wedge y = -\frac{c}{b}\right]$$

ESEMPIO:
#81: $2\cdot x + y - 2 = 0$
#82: SOLVE([2·x + y - 2 = 0, y = 0], [x, y])
#83: $[x = 1 \wedge y = 0]$

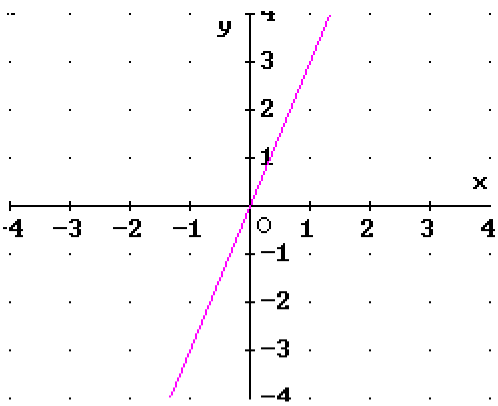
#84: SOLVE([2·x + y - 2 = 0, x = 0], [x, y])
#85: $[x = 0 \wedge y = 2]$

I punti di intersezione della retta con gli assi cartesiani sono **P(1,0)** e **Q(0,2)**.



Naturalmente, se la retta è del tipo **ax+by=0**, cioè **y=mx**, l'unico punto di intersezione con gli assi sarà **O (0,0)**.

ESEMPIO:
#86: SOLVE([3·x - y = 0, y = 0], [x, y])
#87: $[x = 0 \wedge y = 0]$
#88: SOLVE([3·x - y = 0, x = 0], [x, y])
#89: $[x = 0 \wedge y = 0]$

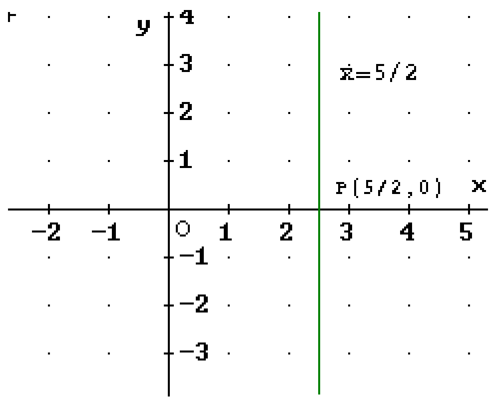


Naturalmente, se la retta è **parallela all'asse y** (del tipo **ax+c=0**, cioè **x=h)** , l'unico punto di intersezione con gli assi sarà **P (h,0)**.

ESEMPIO:

#90: $2\cdot x - 5 = 0$

#91: $$x = \frac{5}{2}$$



Naturalmente, se la retta è **parallela all'asse x** (del tipo **by+c=0**, cioè **y=k)** , l'unico punto di intersezione con gli assi sarà **P(0,k)**.

ESEMPIO:

#92: $2\cdot y - 1 = 0$

#93: $$y = \frac{1}{2}$$