

STUDIO DELL' EQUAZIONE DI 2° GRADO A DUE INCOGNITE E RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

$$y = a x^2 + b x + c$$

di

Maria Teresa Bianchi

Lezione in laboratorio

a. s. 2003-2004

L'equazione di 2° grado a due incognite x,y, ammette come soluzioni infinite coppie di numeri reali (x, y), cioè esistono infinite coppie di numeri reali che verificano l'uguaglianza.

Se, ad ogni coppia che verifica un'equazione assegnata di questo tipo, facciamo corrispondere un punto del piano cartesiano ortogonale Oxy, osserviamo un grafico particolare: la **parabola**. Vediamo un esempio, assegnando un'equazione e trovando alcune delle sue soluzioni, che poi rappresenteremo graficamente come punti del piano Oxy.

#1: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

#2: $y = x^2 - 5 \cdot x + 6$

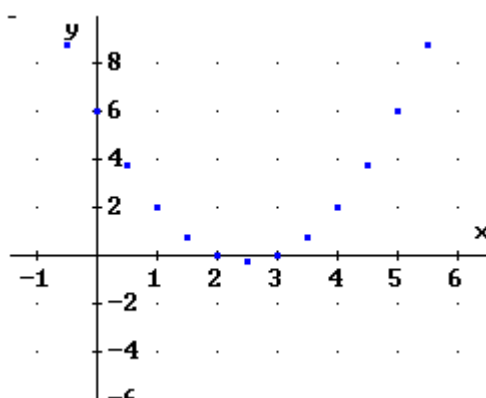
Utilizzando la funzione di Derive, TABLE (Calcola, Tabella , tenendo selezionato il 2° membro della #2 e dando valori anche negativi alla x), troviamo alcune coppie soluzione della #2:

#3: TABLE $\left(x^2 - 5 \cdot x + 6, x, -2, 6, \frac{1}{2} \right)$

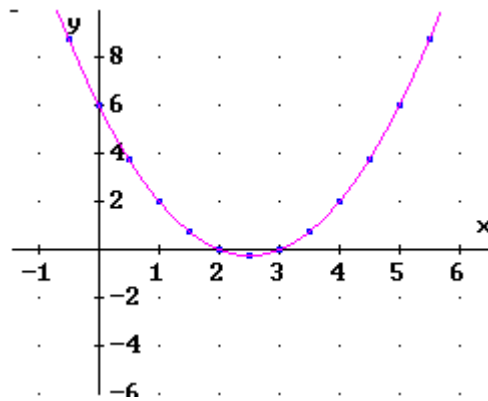
#4:

-2	20
3	63
- 2	4
-1	12
1	35
- 2	4
0	6
1	15
2	4
1	2
3	3
2	4
2	0
5	1
2	- 4

Ora rappresentiamo tali coppie come punti del piano, andando in ambiente 2D, inserendo il grafico (si può, anche selezionare la visualizzazione più o meno grande dei punti prima di disegnarli con Opzioni Visualizzazione Punti).



Tracciamo ora tutta la curva (parabola) selezionando l'equazione #2.



LE SOLUZIONI DI UNA QUALSIASI EQUAZIONE DI 2° GRADO A DUE INCOGNITE del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

(esclusi casi con particolari coefficienti a, b, c)

COSTITUISCONO SEMPRE LE COORDINATE DEI PUNTI DI UNA PARABOLA del piano Oxy con asse di simmetria parallelo all'asse y.

Chiameremo allora brevemente la #1 **EQUAZIONE DELLA PARABOLA.**

Viceversa, disegnata una parabola del piano cartesiano, ci sarà sempre associata ad essa un' unica equazione di 2° grado a due incognite, $y = ax^2 + bx + c$ con a diverso da zero.

%%%%%%%%%

Analizziamo ora, **al variare dei coefficienti dell'equazione generale:**

$$\#5: \quad y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

cosa accade nella rappresentazione grafica.

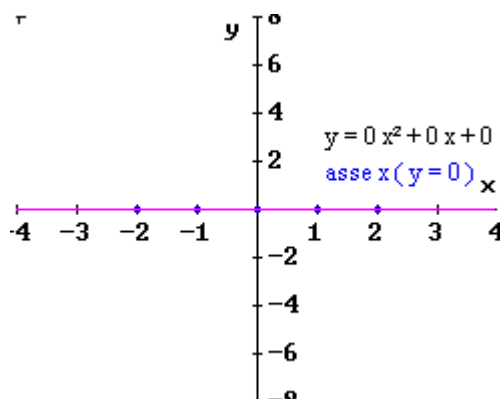
1° caso

$$\#6: \quad a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$$

$$\#7: \quad y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\#8: \quad y = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

E' evidente che tale equazione è verificata da **coppie di numeri reali** aventi l'ordinata zero, del tipo **(x,0)**.
Si ha cioè l'**asse x** (notare che a=0)



2° caso

$$\#9: \quad a = 0 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0$$

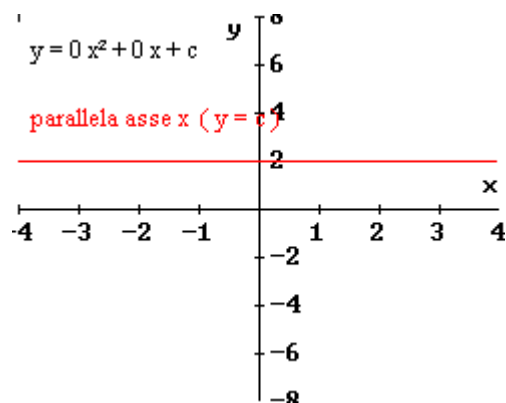
$$\#10: \quad y = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c$$

$$\#11: \quad y = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2$$

E' evidente che tale equazione è verificata da **coppie di numeri reali con l'ordinata c** (2 nell'esempio) e qualsiasi valore di x.

Si avranno punti del piano P **(x,c)**.

Non si ha ancora una parabola, ma una retta parallela all'asse x di equazione **y=c**.



3° caso

$$\#12: \quad a = 0 \wedge b \neq 0 \wedge c = 0$$

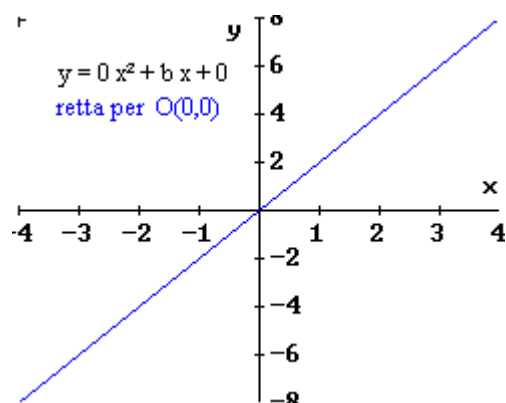
$$\#13: \quad y = 0 \cdot x^2 + b \cdot x + 0$$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali del tipo **(x, bx)**. Si ha una retta passante per O di equazione:

$$\#14:$$

$$y = b \cdot x$$

$$\#15: \quad y = 2 \cdot x$$



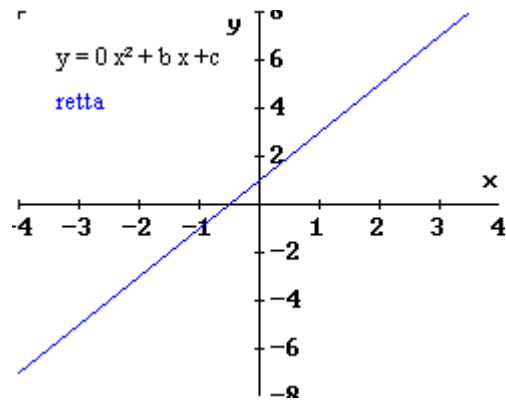
4° caso

$$\#16: a = 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$$

$$\#17: y = 0 \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali del tipo $(x, bx+c)$.
Si ha l'equazione di una retta non passante per l'origine ed è una funzione:

$$\#18: y = 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1$$



5° caso

$$\#19: a \neq 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$$

$$\#20: y = a \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

$$\#21: y = a \cdot x^2$$

$$\#22: y = x^2$$

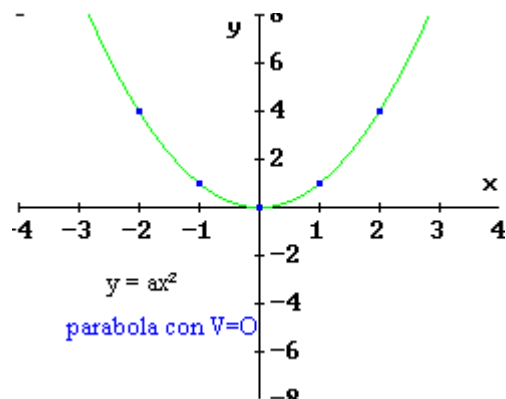
$$\#23: \text{TABLE}(y = x^2, x, -2, 2, 1)$$

#24:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali con un valore **qualsiasi di x e con $y=ax^2$** , cioè del tipo (x, ax^2) .

Si ha una **parabola con vertice nell'origine degli assi cartesiani**.



6° caso

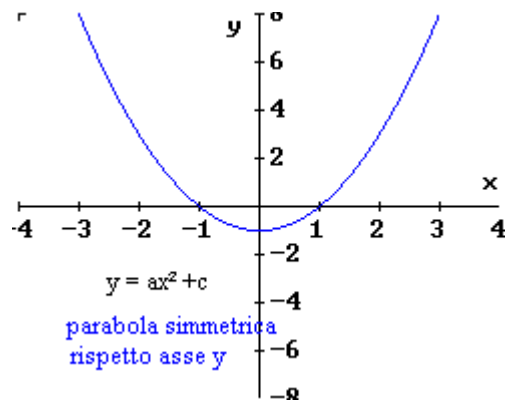
$$\#25: a \neq 0 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0$$

$$\#26: y = a \cdot x^2 + 0 \cdot x + c$$

$$\#27: y = a \cdot x^2 + c$$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali del tipo (x, ax^2+c) .

$$\#28: y = x^2 - 1$$



La parabola che si ottiene è **simmetrica rispetto all'asse y**.

7° caso

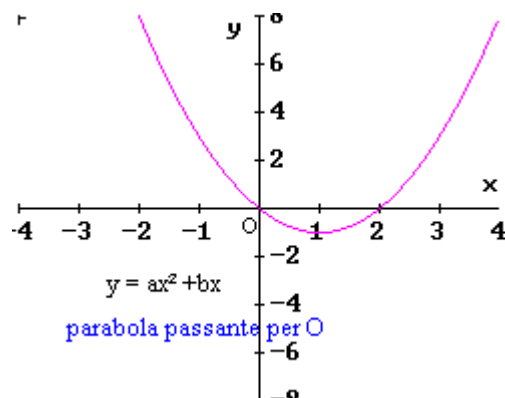
$$\#29: a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c = 0$$

$$\#30: y = a \cdot x^2 + b \cdot x + 0$$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali del tipo (x, ax^2+bx)

CHIARAMENTE LA COPPIA **(0,0)** VERIFICA SEMPRE TALE EQUAZIONE .
Pertanto si avrà una parabola **PASSANTE PER L'ORIGINE DEGLI ASSI CARTESIANI**.

$$\#31: y = x^2 - 2 \cdot x$$



8° caso

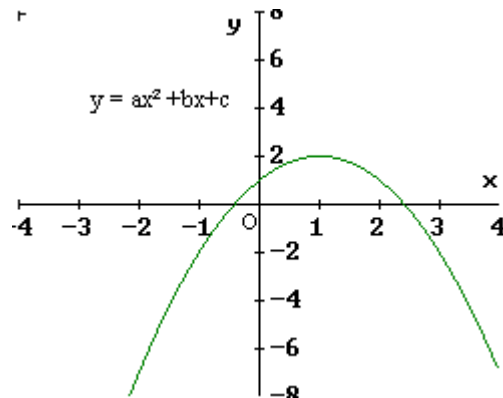
$$\#32: a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$$

$$\#33: y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

E' evidente che tale equazione è verificata da infinite coppie di numeri reali del tipo

$$\#34: \left[x, a \cdot x^2 + b \cdot x + c \right]$$

$$\#35: y = -x^2 + 2 \cdot x + 1$$



SISTEMI DI 2° GRADO A DUE INCOGNITE

RICERCA DEGLI EVENTUALI PUNTI DI INTERSEZIONE TRA UNA RETTA E UNA PARABOLA

Ci proponiamo di trovare le coordinate degli eventuali punti di intersezione tra una retta e una parabola, cioè di scoprire le soluzioni del sistema formato da due equazioni del tipo:

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

le equazioni hanno **due coppie-soluzione in comune**

le equazioni hanno **una coppia-soluzione in comune**

le equazioni **non hanno soluzioni comuni**

Infatti, andare a ricercare le soluzioni comuni significa determinare le coordinate degli eventuali **punti di intersezione** della parabola con la retta.

Da un punto di vista algebrico, si ricorda che ricercare soluzioni comuni a due o più equazioni significa **RISOLVERE UN SISTEMA**.

1. la retta e la parabola sono incidenti in due punti P e Q
RETTA SECANTE la parabola in P e Q
2. la retta e la parabola si incontrano in un sol punto T
RETTA TANGENTE la parabola in T
3. la retta e la parabola non hanno punti in comune
RETTA ESTERNA alla parabola

RICERCA PUNTI DI INTERSEZIONE DI UNA PARABOLA CON GLI ASSI CARTESIANI

Per trovare le coordinate di eventuali punti di intersezione tra una parabola e una retta si deve risolvere algebricamente, come già detto, un sistema.

Nel caso in cui si debbano trovare le coordinate dei punti di intersezione di una parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$ e gli assi cartesiani si dovranno risolvere due sistemi: uno tra l'equazione della parabola $y=ax^2+bx+c$ e quella dell' **asse x** ($y=0$) e l'altro tra l'equazione della parabola e dell' **asse y** ($x=0$). In generale si avrà :

#36: $\text{SOLVE}([y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, x = 0], [x, y])$

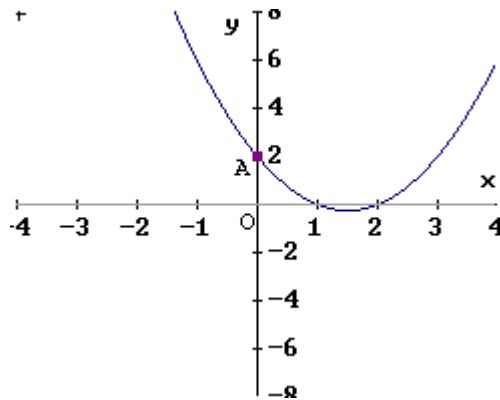
#37: $[x = 0 \wedge y = c]$

Si ha sempre **un punto di intersezione della parabola con l'asse y** di coordinate **(0,c)**

#38: $\text{SOLVE}([y = x^2 - 3 \cdot x + 2, x = 0], [x, y])$

#39: $[x = 0 \wedge y = 2]$

#40: $[0, 2]$



I punti di intersezione della parabola con l'asse x possono essere, come già detto, due, uno, nessuno.

Ciò dipende dal fatto che nel risolvere il sistema

#41: $\text{SOLVE}([y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, y = 0], [x, y])$

si deve risolvere un'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$

che ha, al variare di $\Delta = b^2-4ac$, soluzioni

reali e distinte se $\Delta > 0$

reali e coincidenti se $\Delta = 0$

nessuna soluzione reale se $\Delta < 0$

#42: $x = -\frac{\sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)} + b}{2 \cdot a} \wedge y = 0, x = \frac{\sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)} - b}{2 \cdot a} \wedge y = 0$

$$\Delta > 0$$

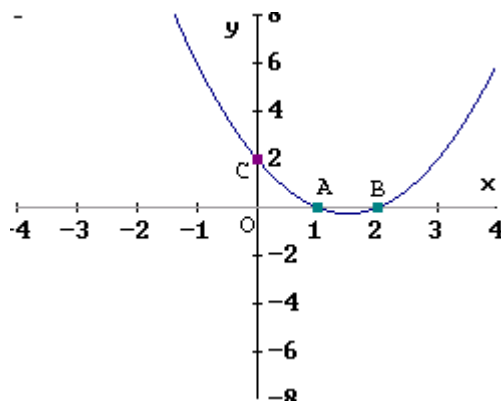
#43:
$$y = x^2 - 3 \cdot x + 2$$

#44:
$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

#45:
$$\text{SOLVE}([y = x^2 - 3 \cdot x + 2, y = 0], [x, y])$$

#46:
$$[x = 1 \wedge y = 0, x = 2 \wedge y = 0]$$

#47:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$



La parabola ha due punti di intersezione con l'asse x

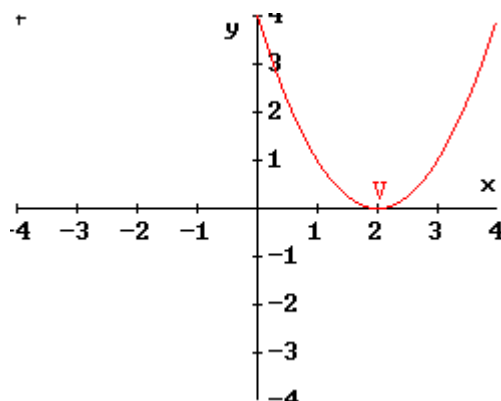
$$\Delta = 0$$

#48:
$$y = x^2 - 4 \cdot x + 4$$

#49:
$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

#50:
$$\text{SOLVE}([y = x^2 - 4 \cdot x + 4, y = 0], [x, y])$$

#51:
$$[x = 2 \wedge y = 0]$$



In questo caso la parabola interseca l'asse delle x in **un solo punto** che è il **vertice della parabola**.

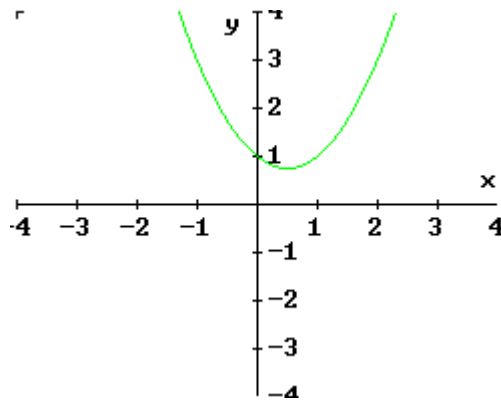
$$\Delta < 0$$

#52: $y = x^2 - x + 1$

#53: $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$

#54: SOLVE([$y = x^2 - x + 1, y = 0$], [x, y])

#55: $\left[x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} \wedge y = 0, x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} \wedge y = 0 \right]$



La parabola non ha punti di intersezione con l'asse x.

Analogamente si procede per ricercare i punti di intersezione con una qualsiasi retta.

#56: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

#57: $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$

#58: SOLVE([$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, A \cdot x + B \cdot y + C = 0$], [x, y])

#59: $x = - \frac{\sqrt{(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot b - B \cdot (B \cdot (4 \cdot a \cdot c - b^2) + 4 \cdot C \cdot a)) + A + B \cdot b}}{2 \cdot B \cdot a} \wedge$

y =

$$\frac{A \cdot \sqrt{(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot b - B \cdot (B \cdot (4 \cdot a \cdot c - b^2) + 4 \cdot C \cdot a)) + A + B \cdot b} + A^2 + A \cdot B \cdot b - 2 \cdot B \cdot C \cdot a}{2 \cdot B \cdot a}$$

$\frac{\cdot B \cdot C \cdot a}{\dots}, x =$

$$\frac{\sqrt{(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot b - B \cdot (B \cdot (4 \cdot a \cdot c - b^2) + 4 \cdot C \cdot a)) - A - B \cdot b}}{2 \cdot B \cdot a} \wedge y = -$$

$$\frac{A \cdot \sqrt{(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot b - B \cdot (B \cdot (4 \cdot a \cdot c - b^2) + 4 \cdot C \cdot a)) - A - B \cdot b} - A^2 - A \cdot B \cdot b + 2 \cdot B \cdot C \cdot a}{2 \cdot B \cdot a}$$

$\frac{\cdot B \cdot C \cdot a}{\dots}$

Si osserva che questa lunga formula è valida per **a diverso da 0** (parabola che non degenera in una retta) e **B diverso da zero** (tutte le rette del piano escluse le parallele all'asse y, caso che analizzeremo a parte).

Inoltre il Δ dell'equazione di secondo grado è dato da:

$$\#60: \quad A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot b - B \cdot (B \cdot (4 \cdot a \cdot c - b^2) + 4 \cdot C \cdot a)$$

se $\Delta > 0$ avremo due punti di intersezione tra parabola e retta (retta secante)

se $\Delta = 0$ avremo un solo punto di intersezione tra parabola e retta (retta tangente)

se $\Delta < 0$ nessun punto di intersezione (retta esterna)

Esempi:

$$\#61: \quad y = x^2 - 2 \cdot x - 3$$

$$\#62: \quad x + y + 1 = 0$$

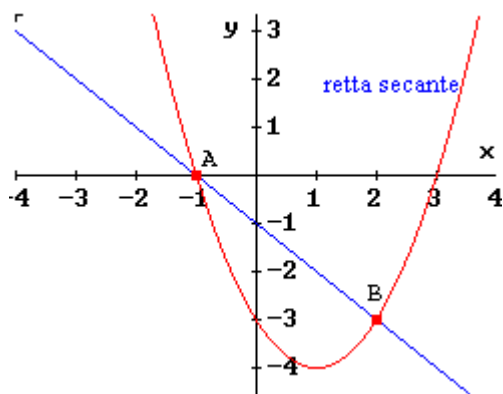
Calcolo di Δ (#60):

$$\#63: \quad 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (1 \cdot (4 \cdot 1 \cdot (-3) - (-2)^2) + 4 \cdot 1 \cdot 1) = 9 > 0$$

$$\#64: \quad \text{SOLVE}([y = x^2 - 2 \cdot x - 3, x + y + 1 = 0], [x, y])$$

$$\#65: \quad [x = -1 \wedge y = 0, x = 2 \wedge y = -3]$$

$$\#66: \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$



$$\#67: \quad y = x^2 - 2 \cdot x - 3$$

$$\#68: \quad 2 \cdot x - y - 7 = 0$$

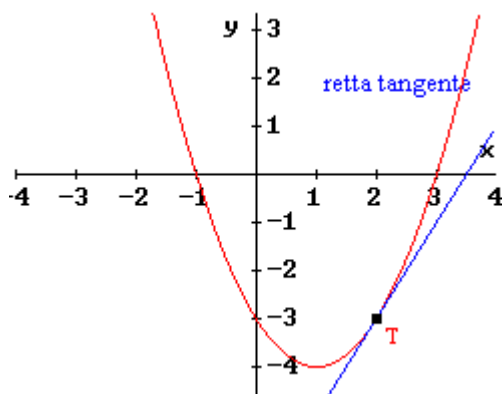
$$\#69: \quad A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot b - B \cdot (B \cdot (4 \cdot a \cdot c - b^2) + 4 \cdot C \cdot a)$$

$$\#70: \quad 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - (-1) \cdot ((-1) \cdot (4 \cdot 1 \cdot (-3) - (-2)^2) + 4 \cdot (-7) \cdot 1) = 0$$

$$\#71: \quad \text{SOLVE}([y = x^2 - 2 \cdot x - 3, 2 \cdot x - y - 7 = 0], [x, y])$$

$$\#72: \quad [x = 2 \wedge y = -3]$$

$$\#73: \quad [2, -3]$$



#74: $y = x^2 - 2 \cdot x - 3$

#75: $2 \cdot x - y - 8 = 0$

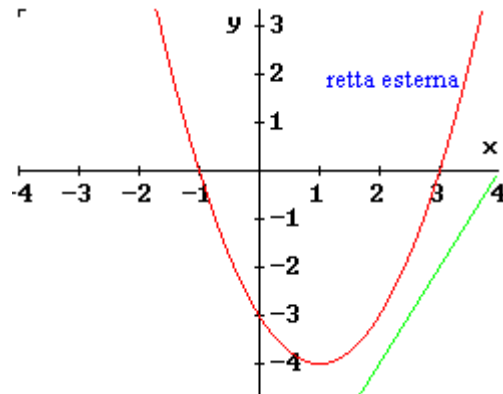
#76: $A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot b - B \cdot (B \cdot (4 \cdot a \cdot c - b^2) + 4 \cdot C \cdot a)$

#77: $2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - (-1) \cdot ((-1) \cdot (4 \cdot 1 \cdot (-3) - (-2)^2) + 4 \cdot (-8) \cdot 1) =$

$-4 < 0$

#78: $\text{SOLVE}([y = x^2 - 2 \cdot x - 3, 2 \cdot x - y - 8 = 0], [x, y])$

#79: $[x = 2 + i \wedge y = -4 + 2 \cdot i, x = 2 - i \wedge y = -4 - 2 \cdot i]$



INTERSEZIONI TRA UNA PARABOLA e UNA RETTA parallela all'asse y

Come già detto prima, questo è un caso particolare in quanto la formula risolutiva #59 non è applicabile quando $B=0$, cioè quando la retta è parallela all'asse y (ricordo che **tale retta non è funzione**), del tipo:

$$\#80: A \cdot x + C = 0$$

cioè:

$$\#81: x = -\frac{C}{A}$$

Il sistema si risolve per **sostituzione**:

$$\#82: y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\#83: x = -\frac{C}{A}$$

$$\#84: y = a \cdot \left(-\frac{C}{A}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{C}{A}\right) + c$$

$$\#85: y = -\frac{C \cdot b}{A} + \frac{C^2 \cdot a}{A^2} + c$$

Si ha **sempre un' unica coppia soluzione** data da:

$$\#86: \left[-\frac{C}{A}, -\frac{C \cdot b}{A} + \frac{C^2 \cdot a}{A^2} + c \right]$$

ESEMPIO:

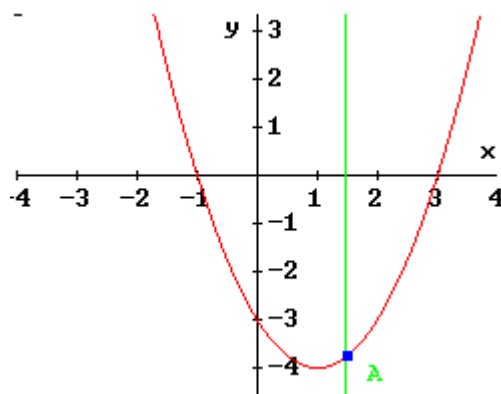
$$\#87: y = x^2 - 2 \cdot x - 3$$

$$\#88: 2 \cdot x - 3 = 0$$

$$\#89: \text{SOLVE}([y = x^2 - 2 \cdot x - 3, 2 \cdot x - 3 = 0], [x, y])$$

$$\#90: \left[x = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{15}{4} \right]$$

$$\#91: \left[\frac{3}{2}, -\frac{15}{4} \right]$$



INTERSEZIONI TRA UNA PARABOLA e UNA RETTA parallela all'asse x

Questo è un caso particolare del caso generale (formula risolutiva #59) applicabile quando $A=0$, cioè quando la retta è parallela all'asse x (ricordo che **tale retta è funzione**), del tipo:

$$\#92: B \cdot y + C = 0$$

$$\#93: y = -\frac{C}{B}$$

Il sistema si risolve per **sostituzione**:

$$\#94: y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\#95: y = -\frac{C}{B}$$

$$\#96: -\frac{C}{B} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\#97: \text{SOLVE}\left(\left[y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, y = -\frac{C}{B}\right], [x, y]\right)$$

$$\#98: \left[x = -\frac{\sqrt{(B \cdot (4 \cdot a \cdot c - b^2) + 4 \cdot C \cdot a) \cdot \sqrt{(-B)} + B \cdot b}}{2 \cdot B \cdot a} \wedge y = -\frac{C}{B}, x = \frac{\sqrt{(B \cdot (4 \cdot a \cdot c - b^2) + 4 \cdot C \cdot a) \cdot \sqrt{(-B)} - B \cdot b}}{2 \cdot B \cdot a} \wedge y = -\frac{C}{B} \right]$$

Ovviamente al variare del Δ si hanno **due punti, un punto, nessun punto** di intersezione tra parabola retta.

C'è da osservare che quando $\Delta=0$ il **punto di tangenza è proprio il vertice della parabola**.

Esempi:

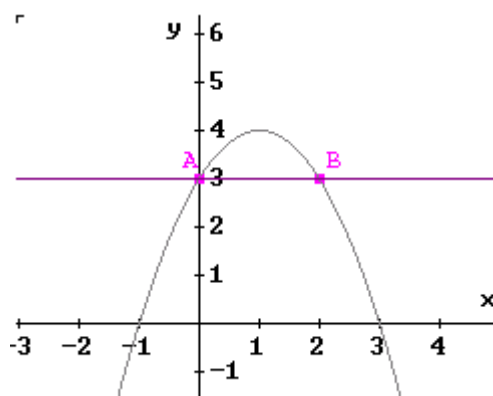
$$\#99: y = -x^2 + 2 \cdot x + 3$$

$$\#100: y = 3$$

$$\#101: \text{SOLVE}\left(\left[y = -x^2 + 2 \cdot x + 3, y = 3\right], [x, y]\right)$$

$$\#102: [x = 0 \wedge y = 3, x = 2 \wedge y = 3]$$

$$\#103: \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

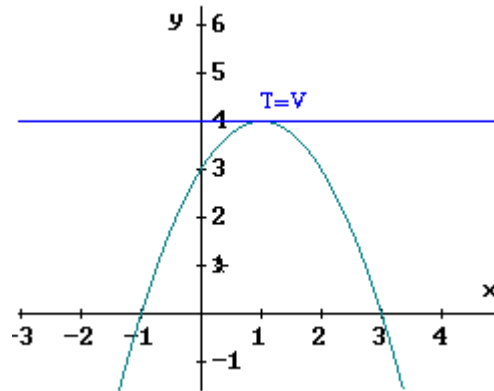


#104: $y = -x^2 + 2x + 3$

#105: $y = 4$

#106: SOLVE($[y = -x^2 + 2x + 3, y = 4]$, $[x, y]$)

#107: $[x = 1 \wedge y = 4]$



#108: $y = -x^2 + 2x + 3$

#109: $y = 5$

#110: SOLVE($[y = -x^2 + 2x + 3, y = 5]$, $[x, y]$)

#111: $[x = 1 + i \wedge y = 5, x = 1 - i \wedge y = 5]$

