

TRASFORMAZIONI LINEARI

Si chiama **trasformazione lineare** ogni corrispondenza biunivoca che trasforma rette in rette.
Le leggi generali sono:

$$\#1: \begin{cases} u = a \cdot x + b \cdot y + p \\ v = c \cdot x + d \cdot y + q \end{cases}$$

DEF1:

In una trasformazione si chiama **PUNTO UNITO** o **INVARIANTE** un punto che è corrispondente di se stesso.

DEF2:

In una trasformazione si chiama **retta unita** o **invariante** una retta che è corrispondente di se stessa; in particolare si dice **PUNTUALMENTE INVARIANTE** se è anche invariante ogni suo punto; in caso contrario si dice **GLOBALMENTE INVARIANTE**.

SIMMETRIA CENTRALE DI CENTRO $C(\alpha, \beta)$

Si chiama **SIMMETRIA CENTRALE** di centro C quella corrispondenza biunivoca di punti del piano che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che il segmento PP' abbia come centro C (cioè C è il punto medio di PP').

Due punti simmetrici si dicono **CORRISPONDENTI NELLA SIMMETRIA** centrale.

Per trovare le leggi analitiche di una simmetria centrale si utilizza la definizione: assegnati due punti $P(x, y)$ e $P'(u, v)$, tenendo conto che C deve essere il punto medio di PP' si ha:

$$\#2: \begin{cases} \frac{x + u}{2} = \alpha \\ \frac{y + v}{2} = \beta \end{cases}$$

Ricavando dalle due equazioni le coordinate di P' si ha:

$$\#3: \text{SOLVE} \left(\left[\begin{cases} \frac{x + u}{2} = \alpha \\ \frac{y + v}{2} = \beta \end{cases} \right], [u, v] \right)$$

$$\#4: \begin{cases} u = 2 \cdot \alpha - x \\ v = 2 \cdot \beta - y \end{cases}$$

leggi di trasformazione dirette

$$\#5: \text{SOLVE} \left(\left[\begin{cases} u = 2 \cdot \alpha - x \\ v = 2 \cdot \beta - y \end{cases} \right], [x, y] \right)$$

$$\#6: \begin{cases} x = 2 \cdot \alpha - u \\ y = 2 \cdot \beta - v \end{cases}$$

leggi di trasformazione inverse

Con Derive si può anche creare una funzione che applica le #4 e le #6
DICHARA-DEFINISCI FUNZIONE-NOME-VARIABILI

$$\#7: \text{SIMC}(x, y, \alpha, \beta) := [2 \cdot \alpha - x, 2 \cdot \beta - y]$$

$$\#8: \text{SIMC1}(u, v, \alpha, \beta) := [2 \cdot \alpha - u, 2 \cdot \beta - v]$$

ESEMPIO:

Sia C (3,2) il centro di simmetria . Dato P(1,-1) trovare il suo simmetrico P'.

1° METODO

Dalle leggi #4, sostituendo i valori di α e β , si ha:

$$\#9: \begin{bmatrix} u = 2 \cdot 3 - x \\ v = 2 \cdot 2 - y \end{bmatrix}$$

$$\#10: \begin{bmatrix} u = 6 - x \\ v = 4 - y \end{bmatrix}$$

Sostituendo a x e y le coordinate di P trovo, con il calcolo, le coordinate di P'

$$\#11: \begin{bmatrix} u = 6 - 1 \\ v = 4 - (-1) \end{bmatrix}$$

$$\#12: \begin{bmatrix} u = 5 \\ v = 5 \end{bmatrix}$$

Il punto P' ha coordinate (5,5).

2° METODO

Si utilizzano le funzioni definite SIMC e SIMC1 in # 7 e #8.

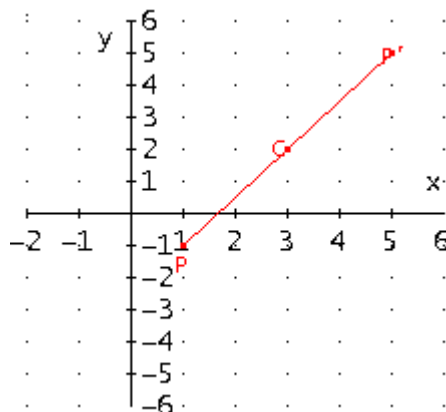
$$\#13: \text{SIMC}(1, -1, 3, 2)$$

$$\#14: [5, 5]$$

Facciamo ora il **grafico**.

Con Derive i punti, per essere congiunti nel grafico, devono essere inseriti in una matrice; in questo caso di 3 righe e 2 colonne.

$$\#15: \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$



PROPRIETA' DELLE SIMMETRIE CENTRALI

1 - Ogni simmetria centrale scambia tra loro punti corrispondenti.

dim: Si dimostra sia geometricamente, che con le equazioni (scambiando le variabili).

2 - In una simmetria centrale di centro C:

a. il centro è l'unico punto unito

b. ad ogni retta passante per C corrisponde se stessa, cioè è unita (globalmente invariante).

3 - La simmetria di centro C

a. scambia ogni semiretta di origine C con la sua opposta

b. scambia tra loro tutti i semipiani opposti aventi come bordo le rette passanti per C.

4 - In una simmetria centrale due rette corrispondenti sono parallele.

5 - TEOREMA

Ogni simmetria centrale è una **ISOMETRIA**.

Corollario:

retta → retta

semiretta → semiretta

angolo → angolo isometrico

triangolo → triangolo isometrico

figura → figura isometrica

Dimostrazione 2a: Il centro di simmetria è l'unico punto unito.

Applichiamo la trasformazione al punto **C** (α, β)

$$\#16: \begin{bmatrix} u = 2 \cdot \alpha - x \\ v = 2 \cdot \beta - y \end{bmatrix}$$

$$\#17: \begin{bmatrix} u = 2 \cdot \alpha - \alpha \\ v = 2 \cdot \beta - \beta \end{bmatrix}$$

$$\#18: \begin{bmatrix} u = \alpha \\ v = \beta \end{bmatrix}$$

Dimostrazione 4: In una simmetria centrale due rette corrispondenti sono parallele.

Consideriamo l'equazione di una retta r $ax + by + c = 0$ e le trasformazioni inverse; sostituiamo al posto di x e y della retta le leggi di trasformazione.

Otterremo l'equazione di una retta r' con incognite u e v che avrà lo stesso coefficiente angolare di r: quindi le due rette saranno parallele.

$$\#19: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

$$\#20: \begin{bmatrix} x = 2 \cdot \alpha - u \\ y = 2 \cdot \beta - v \end{bmatrix}$$

$$\#21: a \cdot (2 \cdot \alpha - u) + b \cdot (2 \cdot \beta - v) + c = 0$$

$$\#22: \text{SOLVE}(a \cdot (2 \cdot \alpha - u) + b \cdot (2 \cdot \beta - v) + c = 0, [u, v, a, b])$$

$$\#23: a \cdot u + b \cdot v - 2 \cdot a \cdot \alpha - 2 \cdot b \cdot \beta - c = 0$$

Dimostrazione 2b: Ogni retta passante per C è unita (globalmente invariante).

Abbiamo dimostrato nel punto precedente che la retta r viene trasformata in una sua parallela, supponiamo ora che la retta r passi per C.

Per l'appartenenza del punto C alla retta r si ha:

$$\#24: a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c = 0$$

$$\#25: \text{SOLVE}(a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c = 0, [c])$$

$$\#26: c = - a \cdot \alpha - b \cdot \beta$$

Sostituendo ora questa espressione di c (#26) nella #23 otterremo l'equazione della retta in u e v con gli stessi coefficienti di r

(e quindi la stessa retta riportando poi le variabili in x e y):

$$\#27: a \cdot u + b \cdot v - 2 \cdot a \cdot \alpha - 2 \cdot b \cdot \beta - (- a \cdot \alpha - b \cdot \beta) = 0$$

$$\#28: \text{SOLVE}(a \cdot u + b \cdot v - 2 \cdot a \cdot \alpha - 2 \cdot b \cdot \beta - (- a \cdot \alpha - b \cdot \beta) = 0, [u, v, \alpha, \beta])$$

$$\#29: a \cdot u + b \cdot v - a \cdot \alpha - b \cdot \beta = 0$$

$$\#30: a \cdot u + b \cdot v + c = 0$$

$$\#31: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Dimostrazione 5:

Ogni simmetria centrale è una isometria

Si deve dimostrare che due qualsiasi segmenti AB e A'B' che si corrispondono in una simmetria centrale di centro C sono isometrici.

Consideriamo A(a,b), B(c,d), A'(e,f), B'(g,h) e le leggi di simmetria centrale di centro α e β (#4 o #7) e dimostriamo che la distanza AB è uguale alla distanza A'B'.

$$\#32: \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

$$\#33: \sqrt{(a^2 - 2 \cdot a \cdot c + c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot d + d^2)}$$

$$\#34: \sqrt{(g - e)^2 + (h - f)^2}$$

$$\#35: \begin{bmatrix} u = 2 \cdot \alpha - x \\ v = 2 \cdot \beta - y \end{bmatrix}$$

$$\#36: \sqrt{((2 \cdot \alpha - c) - (2 \cdot \alpha - a))^2 + ((2 \cdot \beta - d) - (2 \cdot \beta - b))^2}$$

$$\#37: \sqrt{(a^2 - 2 \cdot a \cdot c + c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot d + d^2)}$$

Come si vede la #33 e la #37 (cioè AB e A'B') sono uguali.

q.e.d.

Facciamo ora il grafico di un segmento e del suo corrispondente in una simmetria centrale.
 Consideriamo C(3,1), A(1,2), B(2,4) e A', B' i corrispondenti nella simC che troveremo con le leggi di trasformazione, usando #7

#38: $SIMC(x, y, \alpha, \beta) := [2 \cdot \alpha - x, 2 \cdot \beta - y]$

#39: $SIMC(1, 2, 3, 1)$

#40: $[5, 0]$

A' ha coordinate (5,0)

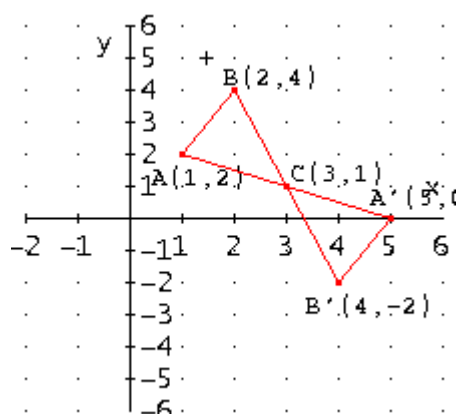
#41: $SIMC(2, 4, 3, 1)$

#42: $[4, -2]$

B' ha coordinate (4,-2)

Inseriamo ora i punti (5 punti) in una matrice di 7 righe e due colonne per fare il grafico (si devono ripetere le coordinate dei punti da collegare: in questo caso C ed A)

#43:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Facciamo ora il grafico di una figura F e della sua corrispondente F' in una simmetria centrale di centro C(3,2).

Diamo le coordinate dei vertici di F:

A(-4,2), B(-2,5), D(1,5), E(1,-3) e troviamo con $SIMC(x,y,\alpha,\beta)$ le coordinate dei punti A',B',D',E' e poi li mettiamo in matrice per fare il grafico collegando i punti.

#44: $SIMC(-4, 2, 3, 2)$

#45: $[10, 2]$

#46: $SIMC(-2, 5, 3, 2)$

#47: $[8, -1]$

#48: $SIMC(1, 5, 3, 2)$

#49: $[5, -1]$

#50: $SIMC(1, -3, 3, 2)$

#51: $[5, 7]$

$$\#52: \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 5 \\ 1 & 5 \\ 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#53: \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 8 & -1 \\ 5 & -1 \\ 5 & 7 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#54: [[3, 2]]$$

$$\#55: \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#56: \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\#57: \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\#58: \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

