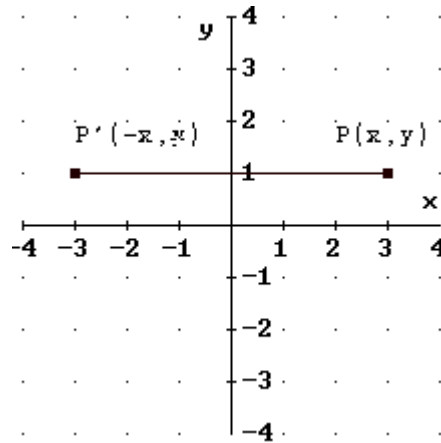


LE SIMMETRIE ASSIALI

Si definisce **simmetria assiale di asse s** una trasformazione del piano in sé (una corrispondenza biunivoca) che associa ad ogni punto P un punto P', tale che il segmento PP' sia perpendicolare alla retta r e il suo punto medio M stia su s (cioè la retta s è asse del segmento PP').

Ricaviamo ora le equazioni di alcune simmetrie assiali nel piano cartesiano Oxy

SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE Y di equazione $x = 0$



#1:
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dal grafico si capisce immediatamente quali saranno le leggi della simmetria cercata. Chiamando (u, v) le coordinate di P' e (x, y) le coordinate di P si avrà:

$$\begin{bmatrix} u = -x \\ v = y \end{bmatrix}$$

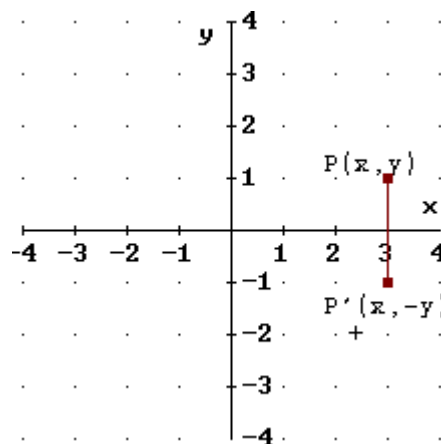
trasformazioni dirette

$$\begin{bmatrix} x = -u \\ y = v \end{bmatrix}$$

trasformazioni inverse

SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE X di equazione $y = 0$

#4:
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$



Dal grafico si capisce immediatamente quali saranno le leggi della simmetria cercata. Chiamando (u, v) le coordinate di P' e (x, y) le coordinate di P si avrà:

$$\begin{bmatrix} u = x \\ v = -y \end{bmatrix}$$

trasformazioni dirette

$$\begin{bmatrix} x = u \\ y = -v \end{bmatrix}$$

trasformazioni inverse

SIMMETRIA RISPETTO ALLA RETTA di equazione $x = k$ (retta parallela all'asse y)

#7: $x = 2$

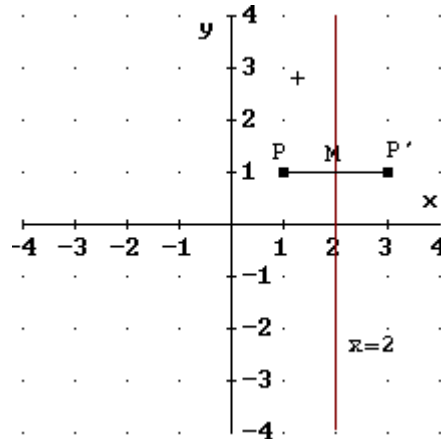
#8: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Dobbiamo trovare le leggi della simmetria assiale di asse $x = k$.

Sia $P(x,y)$ e $P'(u,v)$.

Dalla definizione di simmetria assiale sappiamo che M deve essere il punto medio di PP' .

Le coordinate di M sono (k,y) ; si avrà quindi:



#9: $\begin{bmatrix} \frac{x + u}{2} = k \\ \frac{y + v}{2} = y \end{bmatrix}$

#10: SOLVE $\left(\begin{bmatrix} \frac{x + u}{2} = k \\ \frac{y + v}{2} = y \end{bmatrix}, [u, v] \right)$

#11: $\begin{bmatrix} u = 2 \cdot k - x \\ v = y \end{bmatrix}$

trasformazioni dirette

#12: SOLVE $\left(\begin{bmatrix} \frac{x + u}{2} = k \\ \frac{y + v}{2} = y \end{bmatrix}, [x, y] \right)$

#13: $\begin{bmatrix} x = 2 \cdot k - u \\ y = v \end{bmatrix}$

trasformazioni inverse

SIMMETRIA RISPETTO ALLA RETTA di equazione $y = h$ (retta parallela all'asse x)

#14: $y = 2$

#15: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

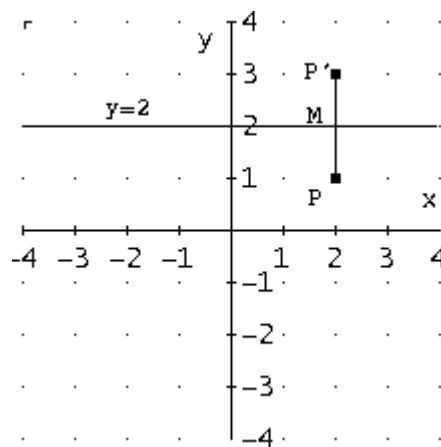
Dobbiamo trovare le leggi della simmetria assiale di asse $y = h$.

Sia $P(x,y)$ e $P'(u,v)$.

Dalla definizione di simmetria assiale sappiamo che M deve essere il punto medio di PP' .

Le coordinate di M sono (x,h) ; si avrà quindi:

#16: $\begin{bmatrix} \frac{x + u}{2} = x \\ \frac{y + v}{2} = h \end{bmatrix}$



#17: SOLVE $\left(\begin{bmatrix} \frac{x + u}{2} = x \\ \frac{y + v}{2} = h \end{bmatrix}, [u, v] \right)$

#18: $\begin{bmatrix} u = x \\ v = 2 \cdot h - y \end{bmatrix}$

trasformazioni dirette

#19: SOLVE $\left(\begin{bmatrix} \frac{x + u}{2} = x \\ \frac{y + v}{2} = h \end{bmatrix}, [x, y] \right)$

#20: $\begin{bmatrix} x = u \\ y = 2 \cdot h - v \end{bmatrix}$

trasformazioni inverse

SIMMETRIA RISPETTO ALLA RETTA generica di equazione $ax + by + c = 0$ (s)

Dalla definizione si ha:

il punto medio M di PP' deve appartenere alla retta asse di simmetria

la retta passante per P e P' deve essere perpendicolare alla retta s asse di simmetria

(il prodotto dei coefficienti angolari deve essere cioè $m \cdot n = -1$)

Si avrà quindi:

$$\#21: \quad a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

$$\#22: \quad \left[\frac{x + u}{2}, \frac{y + v}{2} \right] \text{ coordinate punto medio}$$

$$\#23: \quad m = -\frac{a}{b} \text{ coefficiente angolare retta s}$$

$$\#24: \quad n = \frac{v - y}{u - x} \text{ coefficiente angolare retta passante per P e P'}$$

$$\#25: \quad \left[\begin{array}{l} a \cdot \frac{x + u}{2} + b \cdot \frac{y + v}{2} + c = 0 \\ m \cdot n = -1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{appartenenza di M ad s} \\ \text{condizione di perpendicolarità} \end{array}$$

$$\#26: \quad \left[\begin{array}{l} a \cdot \frac{x + u}{2} + b \cdot \frac{y + v}{2} + c = 0 \\ \left(-\frac{a}{b} \right) \cdot \frac{v - y}{u - x} = -1 \end{array} \right]$$

Risoluzione del sistema rispetto ad u e v:

$$\#27: \quad \text{SOLVE} \left(\left(\begin{array}{l} a \cdot \frac{x + u}{2} + b \cdot \frac{y + v}{2} + c = 0 \\ \left(-\frac{a}{b} \right) \cdot \frac{v - y}{u - x} = -1 \end{array} \right), [u, v] \right)$$

$$\#28: \quad \left[\begin{array}{l} u = \frac{-\frac{2}{a} + \frac{2}{b}}{2} \cdot x - \frac{2ab}{2} \cdot y - \frac{2ac}{2} \\ v = -\frac{2ab}{2} \cdot x + \frac{\frac{2}{a} - \frac{2}{b}}{2} \cdot y - \frac{2bc}{2} \\ b \cdot (u - x) \neq 0 \end{array} \right]$$

trasformazioni dirette

$$\#29: \text{SOLVE} \left[\left[\begin{array}{l} a \cdot \frac{x+u}{2} + b \cdot \frac{y+v}{2} + c = 0 \\ \left(-\frac{a}{b} \right) \cdot \frac{v-y}{u-x} = -1 \end{array} \right], [x, y] \right]$$

$$\#30: \left[\begin{array}{l} x = \frac{-\frac{2}{a} + \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot u - \frac{2ab}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot v - \frac{2ac}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \\ y = -\frac{2ab}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot u + \frac{\frac{2}{a} - \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot v - \frac{2bc}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \\ b \cdot (x - u) \neq 0 \end{array} \right]$$

trasformazioni inverse

Analogamente a quanto fatto per la simmetria centrale, con Derive si possono definire delle funzioni che possono essere usate in modo immediato (DICHIARA- DEFINISCI FUNZIONE- NOME-VARIABILI)

$$\#31: \text{SIMaX}(x, y) := [x, -y]$$

$$\#32: \text{SIMaX1}(u, v) := [u, -v]$$

$$\#33: \text{SIMaY}(x, y) := [-x, y]$$

$$\#34: \text{SIMaY1}(u, v) := [-u, v]$$

$$\#35: \text{SIMparX}(x, y, h) := [x, 2h - y]$$

$$\#36: \text{SIMparX1}(u, v, h) := [u, 2h - v]$$

$$\#37: \text{SIMparY}(x, y, k) := [2k - x, y]$$

$$\#38: \text{SIMparY1}(u, v, k) := [2k - u, v]$$

$$\#39: \text{SIMretta}(x, y, a, b, c) := \left[\begin{array}{l} \frac{-\frac{2}{a} + \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot x - \frac{2ab}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot y - \\ \frac{2ac}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}}, -\frac{2ab}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot x + \frac{\frac{2}{a} - \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot y - \frac{2bc}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \end{array} \right]$$

$$\#40: \text{SIMretta1}(u, v, a, b, c) := \left[\begin{array}{l} \frac{-\frac{2}{a} + \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot u - \frac{2ab}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot v - \\ \frac{2ac}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}}, -\frac{2ab}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot u + \frac{\frac{2}{a} - \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot v - \frac{2bc}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \end{array} \right]$$

ESEMPIO

Sia data la retta r di equazione $2x + 2y - 3 = 0$, asse di simmetria in una simmetria assiale. Determina le leggi della trasformazione.

Applicando la #39 si ha:

$$\#41: \text{SIMretta}(x, y, 2, 2, -3)$$

$$\#42: \left[\frac{3}{2} - y, \frac{3}{2} - x \right]$$

cioè:

$$\#43: \begin{bmatrix} u = \frac{3}{2} - y \\ v = \frac{3}{2} - x \end{bmatrix}$$

e per trovare le inverse si applica la #40

$$\#44: \text{SIMretta1}(u, v, 2, 2, -3)$$

$$\#45: \left[\frac{3}{2} - v, \frac{3}{2} - u \right]$$

$$\#46: \begin{bmatrix} x = \frac{3}{2} - v \\ y = \frac{3}{2} - u \end{bmatrix}$$

Ora vogliamo trasformare la retta di equazione $x - 2y + 1 = 0$, con la legge di trasformazione #46.

$$\#47: x - 2 \cdot y + 1 = 0$$

$$\#48: \left(\frac{3}{2} - v \right) - 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - u \right) + 1 = 0$$

$$\#49: \text{SOLVE} \left(\left(\frac{3}{2} - v \right) - 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - u \right) + 1 = 0, [u, v] \right)$$

$$\#50: 4 \cdot u - 2 \cdot v - 1 = 0$$

$$\#51: \text{SOLVE}(4 \cdot u - 2 \cdot v - 1 = 0, v)$$

$$\#52: v = 2 \cdot u - \frac{1}{2}$$

Abbiamo sostituito alle variabili u e v rispettivamente x e y .

$$\#53: y = 2 \cdot x - \frac{1}{2}$$

$$\#54: 4 \cdot x - 2 \cdot y - 1 = 0$$

Si può verificare che l'asse di simmetria è **bisettrice** di due dei quattro angoli formati dalle rette r e r'

$$\text{asse } 2x + 2y - 3 = 0$$

$$r \quad x - 2y + 1 = 0$$

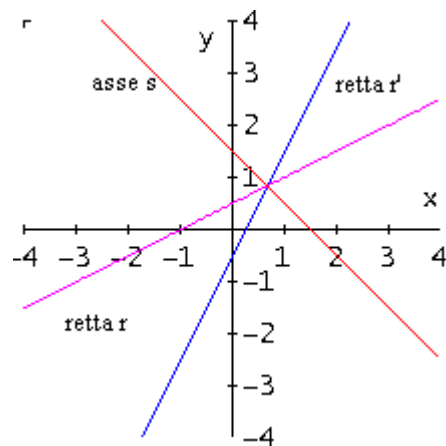
$$r' \quad 4x - 2y - 1 = 0$$

Facciamo ora il grafico delle tre rette.

#55: $2 \cdot x + 2 \cdot y - 3 = 0$

#56: $x - 2 \cdot y + 1 = 0$

#57: $4 \cdot x - 2 \cdot y - 1 = 0$



PROPRIETA' DELLA SIMMETRIA ASSIALE

Il movimento che realizza intuitivamente questa simmetria è il RIBALTAMENTO DEL PIANO ATTORNO ALL'ASSE s

- 1 In una simmetria assiale due punti si dicono corrispondenti quando sono simmetrici
- 2 In una simmetria assiale gli unici punti che coincidono con i propri corrispondenti sono i punti che si trovano sull'asse di simmetria (PUNTI INVARIANTI o UNITI)
- 3 L'asse di simmetria è invariante punto per punto (cioè è PUNTUALMENTE INVARIANTE)
- 4 La simmetria assiale rispetto all'asse s scambia tra loro punti corrispondenti (infatti se P' è il simmetrico di P , per definizione P è il simmetrico di P')
- 5 La simmetria assiale scambia tra loro semipiani opposti di bordo s
- 6 In una simmetria assiale sono invarianti o uniti tutti e solo i punti dell'asse
- 7 In una simmetria assiale sono GLOBALMENTE INVARIANTI tutte e solo le rette perpendicolari all'asse
- 8 Una simmetria assiale trasforma una retta parallela all'asse in una retta parallela all'asse (cioè se $r \parallel s \rightarrow r' \parallel s \rightarrow r \parallel r'$)

Quindi in una simmetria assiale esiste una sola retta puntualmente invariante - l'asse di simmetria - e infinite rette globalmente invarianti - le perpendicolari all'asse - .
Per tale motivo le simmetrie assiali vengono anche chiamate SIMMETRIE ORTOGONALI.

9 TEOREMA

Una simmetria di asse s è una ISOMETRIA.

Due figure che si corrispondono in una simmetria assiale sono perciò isometriche

Consideriamo l'asse di simmetria dell'esempio precedente e verifichiamo che è invariante:

$$\#58: 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3 = 0$$

$$\#59: 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - v \right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - u \right) - 3 = 0$$

$$\#60: \text{EXPAND} \left(2 \cdot \left(\frac{3}{2} - v \right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - u \right) - 3 = 0, \text{Rational}, u, v \right)$$

$$\#61: -2 \cdot u - 2 \cdot v + 3 = 0$$

$$\#62: -1 \cdot (-2 \cdot u - 2 \cdot v + 3 = 0)$$

$$\#63: 2 \cdot u + 2 \cdot v - 3 = 0$$

$$\#64: 2 \cdot x + 2 \cdot y - 3 = 0$$

Le equazioni delle rette #58 e #64 sono uguali.

Dimostriamo ciò in generale e poi che i punti dell'asse sono uniti (l'asse è puntualmente invariante (proprietà 2-3)).

$$\#65: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

$$\#66: a \cdot \left(\frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \cdot u - \frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot v - \frac{2 \cdot a \cdot c}{a^2 + b^2} \right) + b \cdot \left(-\frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot u + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot v - \frac{2 \cdot b \cdot c}{a^2 + b^2} \right) + c = 0$$

$$\#67: \text{EXPAND} \left(a \cdot \left(\frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \cdot u - \frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot v - \frac{2 \cdot a \cdot c}{a^2 + b^2} \right) + b \cdot \left(-\frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot u + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot v - \frac{2 \cdot b \cdot c}{a^2 + b^2} \right) + c = 0, \text{Radical}, u, v \right)$$

$$\#68: -1 \cdot (-a \cdot u - b \cdot v - c) = 0$$

$$\#69: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Come si può vedere le equazioni delle due rette sono uguali (#65 e #69); abbiamo dimostrato che l'asse di simmetria è invariante.

Consideriamo ora un punto P appartenente all'asse e dimostriamo che è invariante, cioè che il suo trasformato P' coincide con P.

Le coordinate di P saranno $(x, -(ax+c)/b)$.

Lo dimostriamo usando la funzione SIMretta

$$\#70: \text{SIMretta} \left(x, -\frac{a \cdot x + c}{b}, a, b, c \right)$$

$$\#71: \left[x, -\frac{a \cdot x + c}{b} \right]$$

Si può dimostrare sostituendo le coordinate del punto P nelle leggi dirette #28 e fare i calcoli.

$$\#72: \left[\left[\begin{aligned} u &= \frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \cdot x - \frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot y - \frac{2 \cdot a \cdot c}{a^2 + b^2} \\ v &= -\frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot x + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot y - \frac{2 \cdot b \cdot c}{a^2 + b^2} \\ b \cdot (u - x) &\neq 0 \end{aligned} \right] \right]$$

$$\#73: \left[\left[\begin{aligned} u &= \frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \cdot x - \frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot \left(-\frac{a \cdot x + c}{b} \right) - \frac{2 \cdot a \cdot c}{a^2 + b^2} \\ v &= -\frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot x + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(-\frac{a \cdot x + c}{b} \right) - \frac{2 \cdot b \cdot c}{a^2 + b^2} \\ b \cdot (u - x) &\neq 0 \end{aligned} \right] \right]$$

$$\#74: \text{ EXPAND } \left(\left[\left[\begin{aligned} u &= \frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \cdot x - \frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot \left(-\frac{a \cdot x + c}{b} \right) - \frac{2 \cdot a \cdot c}{a^2 + b^2} \\ v &= -\frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 + b^2} \cdot x + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \left(-\frac{a \cdot x + c}{b} \right) - \frac{2 \cdot b \cdot c}{a^2 + b^2} \\ b \cdot (u - x) &\neq 0 \end{aligned} \right] \right) \right)$$

$\left. \right)$, Radical, u, v

$$\#75: \left[\left[\begin{aligned} u &= x \\ v &= -\frac{a \cdot x + c}{b} \\ b \cdot u - b \cdot x &\neq 0 \end{aligned} \right] \right]$$

EVVIVA DERIVE CHE FA TUTTI QUESTI CALCOLI IN 5 SECONDI !!!!!!! q.e.d.

Dimostriamo ora la **proprietà 7**:

In una s.a. sono globalmente invarianti tutte e sole le rette perpendicolari all'asse.

L'asse di simmetria (s: $ax+by+c=0$) ha coefficiente angolare $-a/b$; una sua perpendicolare con coefficiente angolare b/a

($m \cdot n = -1$) e avrà equazione $bx - ay + d = 0$ (r).

Applichiamo la trasformazione inversa alla retta r e vedremo che si trasforma in se stessa cioè è globalmente invariante (non puntualmente invariante perchè ha un solo punto unito cioè il punto di intersezione con la retta asse)

#76: $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

#77: $b \cdot x - a \cdot y + d = 0$

#78:
$$\left[\left[\begin{aligned} x &= \frac{-\frac{2}{a} + \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot u - \frac{2 \cdot a \cdot b}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot v - \frac{2 \cdot a \cdot c}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \\ y &= -\frac{2 \cdot a \cdot b}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot u + \frac{\frac{2}{a} - \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot v - \frac{2 \cdot b \cdot c}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \\ b \cdot (x - u) &\neq 0 \end{aligned} \right] \right]$$

#79: SOLVE $\left(b \cdot \left(\frac{-\frac{2}{a} + \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot u - \frac{2 \cdot a \cdot b}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot v - \frac{2 \cdot a \cdot c}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \right) - \right. \\ \left. a \cdot \left(\frac{-2 \cdot a \cdot b}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot u + \frac{\frac{2}{a} - \frac{2}{b}}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \cdot v - \frac{2 \cdot b \cdot c}{\frac{2}{a} + \frac{2}{b}} \right) + d = 0, [u, v] \right)$

#80: $b \cdot u - a \cdot v = -d$

#81: $b \cdot u - a \cdot v = -d$

#82: $b \cdot x - a \cdot y + d = 0$

le equazioni #77 e #82 sono uguali
q.e.d.