

Studio della funzione razionale fratta del tipo:

$$\#1: y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

Innanzitutto poniamo le condizioni che i due polinomi dati con $a \neq 0$ e $d \neq 0$ non siano tra loro divisibili:

- escludiamo subito il caso in cui $b=c=e=0$ perchè si avrebbe il rapporto di due monomi che genererebbero una retta, con discontinuità per $x=0$

$$y = \frac{ax^2}{dx}$$

- applichiamo il **teorema del resto** trovando il resto della divisione tra i due polinomi e imponendo che sia **diverso da zero**.

Il resto della divisione tra i due polinomi si trova sostituendo al polinomio di 2° grado il valore $-e/d$, previa divisione di entrambi i polinomi per d , non essendo necessariamente $d=1$.

$$\#2: y = \frac{\frac{a \cdot x^2}{d} + \frac{b \cdot x}{d} + \frac{c}{d}}{\frac{d \cdot x}{d} + \frac{e}{d}}$$

$$\#3: P(x) := \frac{a \cdot x^2}{d} + \frac{b \cdot x}{d} + \frac{c}{d}$$

$$\#4: P(-e/d) := a \cdot e^2 / d^3 - b \cdot e / d^2 + c / d$$

Ponendo tale espressione $\neq 0$, si ottiene la condizione di non divisibilità tra i due polinomi:

$$\#5: R := ae^2 - d(be - cd) \neq 0 \wedge d \neq 0$$

Dominio:

$$\#6: d \cdot x + e \neq 0$$

$$\#7: \text{SOLVE}(d \cdot x + e \neq 0, x)$$

$$\#8: x \neq -\frac{e}{d}$$

Intersezioni con assi cartesiani:

$$\#9: \text{SOLVE}\left(\left[y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, x = 0\right], [x, y]\right)$$

$$\#10: \left[x = 0 \wedge y = \frac{c}{e}\right]$$

Punto di intersezione con **asse y**, se $e \neq 0$; se $e=0$ non si hanno punti di intersezione con l'asse y.

$$\#11: \left[0, \frac{c}{e}\right]$$

$$\#12: \text{SOLVE} \left(\left[y = \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e}, y = 0 \right], [x, y] \right)$$

$$\#13: \left[x = -\frac{\sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)} + b}{2 \cdot a} \wedge y = 0 \wedge d \cdot x \neq -e, x = \frac{\sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)} - b}{2 \cdot a} \wedge y = 0 \wedge d \cdot x \neq -e \right]$$

Punti di intersezione con **asse x**:

se $b^2 - 4ac > 0$ si hanno due punti di intersezione con l'asse x

$$\#14: \left[\begin{array}{l} -\frac{\sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)} + b}{2 \cdot a} \quad 0 \\ \frac{\sqrt{(b^2 - 4 \cdot a \cdot c)} - b}{2 \cdot a} \quad 0 \end{array} \right]$$

Punti di intersezione con **asse x**:

se $b^2 - 4ac = 0$ si ha un solo punto di intersezione con l'asse x

$$\#15: \left[-\frac{b}{2 \cdot a}, 0 \right]$$

Punti di intersezione con **asse x**:

se $b^2 - 4ac < 0$ non si hanno punti di intersezione con l'asse x

Limiti e ricerca degli asintoti

$$\#16: \lim_{x \rightarrow -e/d^-} \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e}$$

$$\#17: -\infty \cdot \text{SIGN}(d \cdot (a \cdot e^2 - b \cdot d \cdot e + c \cdot d))$$

$$\#18: \lim_{x \rightarrow -e/d^+} \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e}$$

$$\#19: \infty \cdot \text{SIGN}(d \cdot (a \cdot e^2 - d \cdot (b \cdot e - c \cdot d)))$$

Si osservi che il segno dei limiti dipende dal segno del prodotto di **d** e $ae^2 - d(be - cd)$ che sono **entrambi $\neq 0$** per la condizione di non divisibilità tra i polinomi (#5).

La retta di equazione $dx + e = 0$ è **asintoto verticale** per la funzione.

$$\#20: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e}$$

$$\#21: \infty \cdot \text{SIGN}(a \cdot d)$$

$$\#22: \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e}$$

$$\#23: \quad \quad \quad - \infty \cdot \text{SIGN}(a \cdot d)$$

Non ci sono asintoti orizzontali, ma è soddisfatta la **condizione necessaria** per avere asintoti obliqui.

Per determinare l'equazione dell' **asintoto obliquo**, possiamo usare il metodo del **quoziente tra i due polinomi**:

$$\#24: \text{QUOTIENT}(a \cdot x^2 + b \cdot x + c, d \cdot x + e)$$

$$\#25: \quad \quad \quad \frac{a \cdot x}{d} - \frac{a \cdot e - b \cdot d}{d^2}$$

L'equazione dell'asintoto obliquo è:

$$\#26: \quad y = \frac{a \cdot x}{d} - \frac{a \cdot e - b \cdot d}{d^2}$$

Calcolo della derivata prima e ricerca degli eventuali massimi e/o minimi relativi

$$\#27: \frac{d}{dx} \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{F(x)}{G(x)} \rightarrow \frac{G(x) \cdot \frac{d}{dx} F(x) - F(x) \cdot \frac{d}{dx} G(x)}{G(x)^2}$$

$$\#28: \frac{(d \cdot x + e) \cdot \frac{d}{dx} (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) - (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot \frac{d}{dx} (d \cdot x + e)}{(d \cdot x + e)^2}$$

$$\#29: \frac{a \cdot d \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot x + b \cdot e - c \cdot d}{(d \cdot x + e)^2}$$

Condizione Necessaria per la ricerca dei massimi e/o minimi relativi **y'=0**

$$\#30: \frac{a \cdot d \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot x + b \cdot e - c \cdot d}{(d \cdot x + e)^2} = 0$$

$$\#31: \text{SOLVE} \left(\frac{a \cdot d \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot x + b \cdot e - c \cdot d}{(d \cdot x + e)^2}, x \right)$$

$$\#32: x = \frac{\sqrt{(a \cdot a \cdot e^2 - d \cdot (b \cdot e - c \cdot d))} - a \cdot e}{a \cdot d} \vee x = -$$

$$\frac{\sqrt{(a \cdot a \cdot e^2 - d \cdot (b \cdot e - c \cdot d))} + a \cdot e}{a \cdot d}$$

$$\#33: \Delta = a (a e^2 - d (b e - c d))$$

Si osservi che il segno di Δ dipende dal segno del prodotto di a e $ae^2 - d(be - cd)$ che sono **entrambi $\neq 0$** per le condizioni poste all'inizio; quindi il Δ **non potrà mai essere uguale a zero**, cioè l'equazione non avrà mai due soluzioni coincidenti.

Si hanno allora solo due casi:

$\Delta > 0$ due soluzioni reali e distinte \rightarrow si avrà un massimo e un minimo relativo

$\Delta < 0$ nessuna soluzione reale \rightarrow non ci sono massimi né minimi relativi

Consideriamo il caso $\Delta > 0$ e studiamo il **segno della derivata prima** per la crescita e/o decrescenza della funzione.

$$\#34: \frac{a \cdot d \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot x + b \cdot e - c \cdot d}{(d \cdot x + e)^2} > 0$$

$$\#35: a \cdot d \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot x + b \cdot e - c \cdot d > 0$$

E' sufficiente studiare il segno del numeratore, essendo il denominatore positivo per ogni x appartenente al dominio.

se **$ad > 0$** il numeratore è positivo per valori esterni alle due soluzioni dell'equazione (#32)

+++++++x1-----x2+++++++
 crescente decrescente crescente
 MAX **MIN**

se **$ad < 0$** il numeratore è positivo per valori interni alle due soluzioni dell'equazione

-----x1+++++++x2-----
 decrescente crescente decrescente
 MIN **MAX**

Calcolo della derivata seconda, concavità e eventuali punti di flesso

$$\#36: \frac{d}{dx} \frac{a \cdot d \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot e \cdot x + b \cdot e - c \cdot d}{(d \cdot x + e)^2}$$

$$\#37: \frac{2 \cdot (a \cdot e^2 - d \cdot (b \cdot e - c \cdot d))}{(d \cdot x + e)^3}$$

$$\#38: \frac{2 \cdot (a \cdot e^2 - d \cdot (b \cdot e - c \cdot d))}{(d \cdot x + e)^3} = 0$$

Tale equazione non ha soluzioni, quindi **la funzione non presenta flessi**.

Si osservi che ancora il numeratore coincide con l'espressione della condizione di non divisibilità(#5), quindi diverso da zero.

Studiando il segno della derivata seconda si può stabilire la concavità verso l'alto o verso il basso della funzione.

Conclusioni:

la curva ha sempre un asintoto verticale e uno obliquo

ha un massimo e un minimo relativo oppure non ha massimi né minimi relativi

non ha flessi

si può dimostrare, inoltre, che il **punto di intersezione tra gli asintoti è centro di simmetria per la funzione**

$$\#39: \text{SOLVE} \left(\left[d \cdot x + e = 0, y = \frac{a \cdot x}{d} - \frac{a \cdot e - b \cdot d}{d^2} \right], [x, y] \right)$$

$$\#40: \left[x = -\frac{e}{d} \wedge y = \frac{b \cdot d - 2 \cdot a \cdot e}{d^2} \right]$$

$$\#41: \left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{e}{d} \\ \beta = \frac{b \cdot d - 2 \cdot a \cdot e}{d^2} \end{array} \right]$$

Data una funzione **y=f(x)**, essa è simmetrica rispetto ad un punto **C(α, β)** se **f(x) = -f(2α-x) + 2β**

$$\#42: [2 \alpha - x, 2 \beta - y]$$

$$\#43: \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e} = \frac{a \cdot (2 \alpha - x)^2 + b \cdot (2 \alpha - x) + c}{d \cdot (2 \alpha - x) + e} + 2 \beta$$

$$\#44: \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e} = \frac{a \cdot \left(2 \left(\frac{e}{d} \right) - x \right)^2 + b \cdot \left(2 \left(\frac{e}{d} \right) - x \right) + c}{d \cdot \left(2 \left(\frac{e}{d} \right) - x \right) + e} + 2 \cdot \frac{b \cdot d - 2 \cdot a \cdot e}{d^2}$$

$$\#45: \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e} = \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x + e}$$

ALCUNI ESEMPI

$$\#46: y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x - 3}$$

$$\#47: 2x - 3 = 0$$

$$\#48: \text{QUOTIENT}(x^2 + 2x + 1, 2x - 3)$$

$$\#49: y = \frac{x}{2} + \frac{7}{4}$$

$$\#50: \text{SOLVE}\left(\left[2x - 3 = 0, y = \frac{x}{2} + \frac{7}{4}\right], [x, y]\right)$$

$$\#51: \left[x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}\right]$$

$$\#52: \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

$$\#53: \frac{d}{dx} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x - 3}$$

$$\#54: \frac{2(x - 3)(x - 4)}{(2x - 3)^2} = 0$$

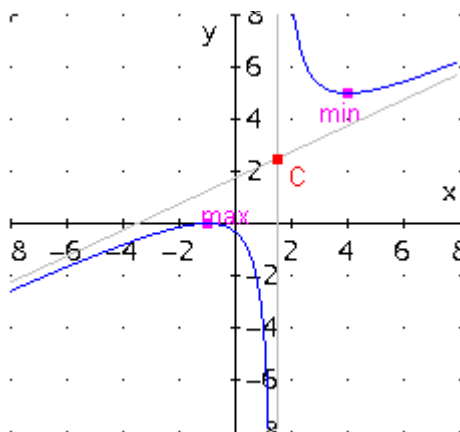
$$\#55: x = 4 \vee x = -1$$

$$\#56: \frac{2(x - 3)(x - 4)}{(2x - 3)^2} > 0$$

$$\#57: x < -1 \vee x > 4$$

$$\#58: [-1, 0]$$

$$\#59: [4, 5]$$



$$\#60: y = \frac{x^2 + x - 1}{-x - 1}$$

$$\#61: -x - 1 = 0$$

$$\#62: \text{QUOTIENT}(x^2 + x - 1, -x - 1)$$

$$\#63: y = -x$$

$$\#64: \text{SOLVE}([-x - 1 = 0, y = -x], [x, y])$$

$$\#65: [x = -1 \wedge y = 1]$$

$$\#66: [-1, 1]$$

$$\#67: \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + x - 1}{-x - 1} \right)$$

$$\#68: 0 = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2}$$

$$\#69: x = -1 - i \vee x = -1 + i$$

$$\#70: \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2} \right)$$

$$\#71: \frac{2}{(x + 1)^3}$$

$$\#72: \frac{2}{(x + 1)^3} > 0$$

$$\#73: x > -1$$

